Universidad Autónoma de Chiapas

Facultad de Ciencias en Física y Matemáticas

SOBRE IDEALES n-ABSORBENTES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestra en Ciencias Matemáticas

PRESENTA:

Mat. Guadalupe Valdez Espinosa

Asesor:
Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. 20 de Junio de 2019.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN
CONTROL ESCOLAR POSGRADO

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas
07 de Junio de 2019
Oficio No. FCFM/0270/19

Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella
Presidente y Director de Tesis
Presente

Por este medio me permito informarle que una vez efectuada la revisión de la tesis denominada:

"SOBRE IDEALES n-ABSORBENTES".

Ha sido aceptada para sustentar el Examen de Grado de Maestra en Ciencias Matemáticas de la **Mat. Guadalupe Valdez Espinosa** con matrícula escolar: PS799.

Se autoriza su impresión en virtud de cumplir con los requisitos correspondientes.

Atentamente

"Por la conciencia de la necesidad de servir"

UNACH
FÍSICA Y MATEMÁTICAS
DIRECCIÓN
FCFM

Dr. Sendic Estrada Jiménez

Director

C.c.p. Dr. Florencio Corona Vázquez, Secretario Académico de la FCFM.
CP. Juan Manuel Aguiar Gámez.- Encargado de Posgrado FCFM
Archivo / Minutario
SEJ /jmag

Dedicatoria

A las personitas que motivan y llenan mi vida:
Jesús Israel, Héctor, Isaac y Javier.

Agradecimientos

El ciclo de mi vida que está a punto de cerrar estuvo lleno tanto de satisfacciones como de sacrificios y aunque es totalmente normal pensar que los sacrificios fueron míos, estas primeras líneas se las quiero dedicar a las personas que en verdad los hicieron: Jesús Israel, Héctor e Isaac, mis hijos, y Javier, mi esposo. Les agradezco profundamente la paciencia y el amor que me mostraron durante esta etapa, lo que hoy he logrado no hubiese sido posible sin el apoyo y la confianza que día a día depositaban en mi. Gracias por estar conmigo en las buenas y por seguir ahí en las malas. Los amo profundamente.

Agradezco a mis padres, Lina y Santiago, porque de alguna manera fueron ellos quienes me pusieron en este camino. A mis hermanos Israel y Paty por sus palabras de aliento, a Israel en especial porque fue mi apoyo y mi confidente durante muchos años.

Al Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella, mi asesor, por todas sus enseñanzas y consejos, no sólo en el aspecto académico. Le agradezco enormemente todas y cada una de las exigencias que tuvo conmigo pues ninguna fue en vano. El ejemplo que me dió y que me llevo es el de una persona trabajadora y gustosa por el conocimiento.

A la Dra. Eddaly Guerra Velasco y al Dr. Sergio Guzmán Sánchez por el tiempo que me dedicaron y gracias al cual pude detectar y corregir algunos errores.

A la Dra. Janeth Anabelle Magaña Zapata y al Dr. Carlos Ariel Pompeyo Gutiérez por sus valiosas observaciones y comentarios.

A mis compañeros de generación Fátima, Elesban y Herón, por la bonita y sana convivencia que pudimos tener, en especial a Elesban y Herón pues fue con ellos con los que mi familia y yo tuvimos más oportunidad de convivir.

Al Dr. Florencio Corona Vázquez y a su familia, por la paciencia, disposición y apoyo que nos bridaron. Las palabras no son suficientes para expresarles mi agradecimiento por todo lo que hicieron por nosotros.

Al Dr. Hugo Villanueva Méndez, por el invaluable e incondicional apoyo que nos ofreció. Mucho de lo que hoy somos se lo debemos a él.

De manera especial quiero agradecer a la Dra. María del Rosario Soler Zapata y a Martín Velasco Hernández por la bonita amistad que me brindaron. A los doctores Armando Felipe Mendoza Pérez y José Saúl Campos Orozco, por la confianza quetuvieron en mí.

A la familia Velázquez Morales, por todo el cariño que nos muestran, por querernos y tratarnos como su familia.

A Marda, por la enorme paciencia que mostró durante la realización de este trabajo.

A mis suegros, Melania y Eleuterio, por el apoyo que a pesar de la distancia nos brindan.

Introducción

La teoría de los anillos conmutativos, mejor conocida como álgebra conmutativa, tuvo sus orígenes en la teoría de invariantes, la geometría algebraica y en la teoría algebraica de números y a su vez ha sido aplicada principalmente a estas áreas. Los ideales constituyen la subestructura más importante de un anillo y la clase más importante de ellos es la formada por los ideales primos. La importancia que tienen los ideales primos es tan destacable que han sido muchos los trabajos que se han dedicado por completo a dar generalizaciones de ellos. Aunque no mencionamos una lista precisa de esos trabajos mecionaremos por ejemplo [4] y [2], destacando que este último trabajo ha tenido un gran seguimiento. Son dos los principales objetivos de esta tesis:

1. Desarrollar [2], el cual es uno de los trabajos más recientes que generaliza el concepto de ideal primo, mostrando cada detalle de la manera más precisa posible y, en algunos casos, reescribiendo el orden en el que aparecen sus resultados de manera que la lectura sea mucho más digerible.

2. Realizar nuestras propias aportaciones.

Una de las metas que se plantearon durante la realización del presente trabajo fue que en él estuviesen los elementos necesarios para hacer su lectura amigable y para evitar, en la medida de lo posible, buscar fuera de él la información que permita el adecuado seguimiento de su contenido. El trabajo consta de tres capítulos y dos apéndices.

En el capítulo 1 se realiza un estudio del espectro primo de un anillo así como de algunas propiedades topológicas que posee, así mismo se presentan resultados que son indispensables para el desarrollo de los capítulos siguientes.

En el capítulo 2 se introduce el concepto de ideal 2-absorbente como una generalización de los ideales primos y se presentan algunas de sus propiedades básicas, mismas que son utilizadas en algunos ejemplos del capítulo 3.

Los capítulos 3 y 4 son la parte central del trabajo, en él se estudian los ideales n-absorbentes que son una generalización natural de los ideales 2-absorbentes y por tanto de los ideales primos. Este capítulo a su vez consta de 5 secciones. En la sección 3.1 se presentan propiedades básicas que tienen los ideales n-absorbentes y se da una interpretación geométrica del teorema 3.10 (el cual es el equivalente al teorema 2.10 para el caso de los ideales 2-absorbentes). En la sección 3.2 se estudia la estabilidad de los ideales n-absorbentes bajo la construcción de nuevos anillos. En la sección 3.3 se estudian los ideales n-absorbentes en anillos especiales como los dominios de Dedekind, los casi dominios de Dedekind, los anillos noetherianos, los dominios de valuación y los dominios de Prüfer. En el capítulo 4 se realiza un estudio de ideales con distintos tipos de absorbencia. En la sección 4.1 se estudia el concepto de ideal fuertemente n-absorbente. En esta sección se conjetura que la n-absorbencia y la fuertemente n-absorbencia son conceptos equivalentes y se muestra que en la clase de los dominios de Prüfer esta conjetura es cierta (corolario 4.11). La sección 4.2 surge de manera natural al preguntarse si los ideales 2-absorbentes son los únicos que satisfacen la propiedad de que $x^2 \in I$ para todo $x \in \sqrt{I}$ y se muestra mediante un ejemplo que la respuesta a esta pregunta es no. A los ideales que satisfagan la propiedad $x \in \sqrt{I}$ implica $x^2 \in I$ se les ha dado el nombre de *ideales rad-2ab* y se asume que el concepto es nuevo y por tanto, que hay una línea nueva de investigación a seguir.

El apéndice A fue planeado para tener a la mano aquellos resultados que fuesen necesarios para una mejor comprensión de la sección 3.3, específicamente de la estructura de los dominios de Prüfer y los casi dominios de Dedekind. Dado que estos anillos localmente son anillos de valuación (valuación discreta en el caso de los casi dominios de Dedekind), el apéndice también presenta resultados importantes de los anillos de valuación, dominios de valuación discreta y una pequeña parte está dedicada también a los ideales fraccionarios.

En el apéndice B se hace un pequeño pero importante estudio de los grupos abelianos ordenados, surgió con la necesidad de establecer una relación entre el número de subgrupos aislados de un grupo abeliano ordenado G y los ideales primos de un anillo de valuación con grupo de valores G. Esta relación es necesaria para exhibir anillos de valuación con dimensión $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tales que sus únicos ideales n-absorbentes sean sus ideales primos.

Notación

En la siguiente lista R denotará un anillo no trivial.

$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales.
$\mathbb{Z}$	Anillo de los números enteros.
$\mathbb{R}$	Campo de los números reales.
$\mathbb{Q}$	Campo de los números racionales.
$\mathbb{N}_m$	Conjunto de los primeros m números naturales.
$n\mathbb{Z} = (n)$	Ideal de $\mathbb{Z}$ generado por $n \in \mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	Enteros módulo $n \in \mathbb{Z}$.
$aR = (a)$	Ideal de R generado por $a \in R$.
$(a_1, \ldots, a_n)\, R$ $=(a_1, \ldots, a_n)$	Ideal de R generado por $a_1, \ldots, a_n \in R$.
$\mathrm{Spec}(R)$	Conjunto de todos los ideales primos de R.
$\mathrm{Min}_R(I)$	Conjunto de los ideales primos de R que son minimales sobre el ideal propio I de R.

$\mathrm{Max}(R)$	Conjunto de todos los ideales maximales de R.
$Q(R)$	Campo de cocientes del dominio entero R.

Si $S \subset R$ es un sistema multiplicativo e I es un ideal de R entonces:

$S^{-1}R$	Anillo de fracciones definido por S.
$S^{-1}I$	Ideal generado por la imagen de I en $S^{-1}R$.

Para el caso especial en el que $S = R \setminus \mathfrak{p}$ se usará la siguiente notación.

$R_{\mathfrak{p}}$	Anillo de fracciones definido por $R \setminus \mathfrak{p}$.
$I_{\mathfrak{p}} = IR_{\mathfrak{p}}$	Ideal generado por la imagen de I en $R_{\mathfrak{p}}$.

Índice general

Capítulo 1

La geometría de Spec(R)

En el presente trabajo todos los anillos se considerarán conmutativos con elemento unitario $1 \neq 0$.

Un ideal de un anillo R es un subconjunto no vacío I de R que es cerrado bajo sumas y multiplicación por elementos de R. Los ideales suelen denotarse por $I, J, \ldots$, el ideal trivial cero se denotará simplemente por 0. Un ideal propio I de R se dice *primo* si cada que $ab \in I$, $a, b \in R$, se tiene que $a \in I$ o bien $b \in I$, y se dice *maximal* si cada que J sea otro ideal de R tal que $I \subset J \subset R$, se tiene que $J = I$ o bien $J = R$. Los ideales primos se denotarán por las letras $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$, mientras que un ideal maximal se suele denotar por la letra $\mathfrak{m}$. En [17, lema 3.3, p.38] se muestra que un ideal $\mathfrak{m}$ de R es ideal maximal de si y solo si $R/\mathfrak{m}$ es un campo, y en [17, lema 3.23, p.43] se muestra que un ideal $\mathfrak{p}$ de R es ideal primo si y solo si $R/\mathfrak{p}$ es dominio entero. Como todo campo es dominio entero se sigue que todo ideal maximal es ideal primo.

El primer resultado de este capítulo garantiza la existencia de ideales primos en anillos no triviales.

Teorema 1.1. (de Krull)[17, proposición 3.9, p.40] Si R es un anillo no trivial entonces R posee al menos un ideal maximal.

El siguiente es una variante del teorema anterior

Corolario 1.2. Si I es un ideal propio de un anillo R entonces existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R tal que $\mathfrak{m} \supset I$.

Si $a \in R$ no es una unidad entonces (a), el ideal generado por a, es propio, por lo que también se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.3. Si $a \in R$ no es unidad entonces existe un ideal maximal de R que contiene a a.

1.1. El espectro primo

Definición 1.4. Sea R un anillo.

1. El *espectro primo de* R, denotado por $\mathrm{Spec}(R)$, es el conjunto de todos los ideales primos de R, es decir

$$\mathrm{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \subset R | \mathfrak{p} \text{ es ideal primo}\}.$$

2. Para un subconjunto $E \subset R$ cualquiera definimos

$$\mathbf{V}(E) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{p} \supset E\}.$$

Note que $\mathrm{Spec}(R) \neq \emptyset$ por el teorema de Krull.

El siguiente lema nos dice que basta considerar sólo los casos en los que E sea un ideal de R.

Lema 1.5. Sean R un anillo y $E, F \subset R$ subconjuntos cualesquiera

1. Si $E \subset F$ entonces $\mathbf{V}(E) \supset \mathbf{V}(F)$.
2. Si $I = (E)$ es el ideal generado por E entonces $\mathbf{V}(E) = \mathbf{V}(I)$.

Demostración.

1. Si $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(F)$ entonces $\mathfrak{p} \supset F$ y como $F \supset E$, se tiene también que $\mathfrak{p} \supset E$, por lo que $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(E)$ y por tanto $\mathbf{V}(F) \subset \mathbf{V}(E)$.
2. Claramente se tiene que $E \subset I$, y por el inciso anterior se sigue que $\mathbf{V}(E) \supset \mathbf{V}(I)$. Sólo falta ver que $\mathbf{V}(I) \supset \mathbf{V}(E)$ para tener la igualdad. Si $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(E)$ entonces $\mathfrak{p} \supset E$ y como $\mathfrak{p}$ es ideal se tiene que $\mathfrak{p} \supset (E) = I$, por lo que $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)$.

□

Observación 1. Note que

1. $\mathbf{V}(R) = \emptyset$ pues no hay ideales propios de R que contengan a R.
2. $\mathbf{V}(0) = \mathrm{Spec}(R)$ pues $0 \in I$ para todo ideal I de R.
3. Si I es un ideal propio de R, por el corolario 1.12, existe un ideal maximal, y por tanto primo, $\mathfrak{m}$ de R tal que $\mathfrak{m} \supset I$, de donde $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$.

Dado un subconjunto E de un anillo R, se define su *radical*, denotado por $\sqrt{E}$, mediante

$$\sqrt{E} = \{x \in R | x^m \in E \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}.$$

Si E es un ideal entonces $\sqrt{E}$ es también un ideal, este hecho clásico puede consultarse en [17, lema 3.46, p.51]. Obsérvese que para subconjuntos arbitrarios E y F de R se tiene que

1. $E \subset \sqrt{E}$.
2. Si $E \subset F$ entonces $\sqrt{E} \subset \sqrt{F}$.

Si un ideal I es tal que $I = \sqrt{I}$ se dice que I es *ideal radical*. Es claro de la definición que todo ideal primo es ideal radical.

Mencionaremos algunas propiedades del radical de un ideal, las cuales pueden encontrarse por ejemplo en la página 10 de [3].

Proposición 1.6. Si $I, J, \mathfrak{p}$ son ideales de R con $\mathfrak{p}$ primo entonces se cumplen las siguientes afirmaciones

1. $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
2. $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
3. $\sqrt{I} = R$ si y solo si $I = R$.
4. $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.
5. $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es la que mencionamos a continuación.

Corolario 1.7. Si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de R entonces $\sqrt{\mathfrak{m}^n} = \mathfrak{m}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La siguiente proposición nos una definición alternativa del radical de un ideal.

Proposición 1.8. [17, lema 3.48, p.52]. Si I es un ideal de R entonces $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)} \mathfrak{p}$.

Recordemos que un elemento a de un anillo R se dice *nilpotente* si $a^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. El conjunto de todos los elementos nilpotentes de R, que de hecho es un ideal (véase [3, proposición 1.7, p.3]), se denota por $\mathrm{Nil}(R)$. Se tiene la siguiente caracterización de $\mathrm{Nil}(R)$.

Corolario 1.9. El nilradical de un anillo R satisface $\mathrm{Nil}(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p}$.

Demostración. Por definición $\mathrm{Nil}(R) = \sqrt{0}$, y por la proposición 1.8 y la observación 1 $\sqrt{0} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(0)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p}$ $\square$

Estas definiciones de $\sqrt{I}$ y $\mathrm{Nil}(R)$ nos servirán para estudiar algunas propiedades de los conjuntos $\mathbf{V}(I)$, donde I es un ideal arbitrario de R, antes de mencionarlas, enunciaremos algunos resultados relacionados a ideales primos, entre ellos el llamado teorema de evasión de primos.

Teorema 1.10. (Teorema de evasión de primos)[3, proposición 1.11 i), p.9] Si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(R)$ e I es un ideal tal que $I \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathfrak{p}_j$, entonces $I \subset \mathfrak{p}_i$ para algún i.

Teorema 1.11. [17, lema 3.55, p.54] Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ y sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{p} \supset I_j$ para algún j.
2. $\mathfrak{p} \supset \bigcap_{j=1}^{n} I_j$.
3. $\mathfrak{p} \supset \prod_{j=1}^{n} I_j$.

Observación 2. Del teorema anterior se sigue que si $\mathfrak{p}, I$ son ideales de R, con $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, entonces $\mathfrak{p} \supset I^n$ si y solo si $\mathfrak{p} \supset I$.

Corolario 1.12. Sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales de un anillo R. Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ es tal que $\mathfrak{p} = \bigcap_{j=1}^{n} I_j$, entonces $\mathfrak{p} = I_j$ para algún j.

Tenemos ya los resultados suficientes para enunciar las propiedades de los conjuntos $\mathbf{V}(I)$.

Proposición 1.13. Sean I, J ideales del anillo R.

1. $\mathbf{V}(IJ) = \mathbf{V}(I \cap J)$.
2. $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}\left(\sqrt{I}\right)$
3. $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}\left(I^n\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
4. $\mathbf{V}(I) = \operatorname{Spec}(R)$ si y solo si $I \subset \operatorname{Nil}(R)$.

Demostración.

1. Dado que $IJ \subset I \cap J$, por 1. del lema 1.5 se sigue que $\mathbf{V}(IJ) \supset \mathbf{V}(I \cap J)$. Falta ver que $\mathbf{V}(IJ) \subset \mathbf{V}(I \cap J)$. Si $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(IJ)$ entonces $\mathfrak{p} \supset IJ$, como $\mathfrak{p}$ es primo, por el teorema 1.11 podemos suponer que $\mathfrak{p} \supset I$. Dado que $I \supset I \cap J$ se sigue que $\mathfrak{p} \supset I \cap J$ y así $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I \cap J)$.

2. Como $I \subset \sqrt{I}$, del lema 1.5 se tiene que $\mathbf{V}(I) \supset \mathbf{V}\left(\sqrt{I}\right)$. Por otro lado, si $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)$ entonces $\mathfrak{p} \supset I$ y entonces $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}} \supset \sqrt{I}$, de donde $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}\left(\sqrt{I}\right)$, y por tanto $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}\left(\sqrt{I}\right)$.

3. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)$ si y solo si $\mathfrak{p} \supset I$, como $\mathfrak{p}$ es primo, esto ocurre si y solo si $\mathfrak{p} \supset I^n$; es decir si y solo si $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}\left(I^n\right)$.

4. Si $\mathbf{V}(I) = \operatorname{Spec}(R)$ entonces para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ se tiene $I \subset \mathfrak{p}$, de donde $I \subset \displaystyle\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)} \mathfrak{p} = \operatorname{Nil}(R)$.

   Recíprocamente, supongamos que $I \subset \operatorname{Nil}(R)$. Sea $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$. Se tiene entonces que $I \subset \operatorname{Nil}(R) = \displaystyle\bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)} \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$; es decir $I \subset \mathfrak{q}$. Así $\mathfrak{q} \in \mathbf{V}(I)$ y por tanto $\operatorname{Spec}(R) \subset \mathbf{V}(I)$. La otra contención siempre es cierta.

$\square$

El siguiente lema permitirá definir una topología para $\operatorname{Spec}(R)$.

Lema 1.14. Sean I, J ideales de R y $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de ideales de R. Se tiene que

1. $\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) = \mathbf{V}(IJ) = \mathbf{V}(I \cap J)$.
2. $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{V}\left(I_\alpha\right) = \mathbf{V}\left(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha\right)$

3. $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(J)$ si y solo si $\sqrt{I} \supset \sqrt{J}$.

Demostración.

1. Si $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ entonces $\mathfrak{p} \supset I$ o bien $\mathfrak{p} \supset J$. En cualquier caso se tiene que $\mathfrak{p} \supset IJ$ y de esta manera $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(IJ)$.
   Recíprocamente, si $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(IJ)$ entonces $\mathfrak{p} \supset IJ$. Como $\mathfrak{p}$ es primo podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathfrak{p} \supset I$. Se tiene así que $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)$ y por tanto $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$.
   Hemos mostrado que $\mathbf{V}(IJ) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$, y como $\mathbf{V}(I \cap J) = \mathbf{V}(IJ)$, según la proposición 1.13, se tiene el resultado.

2. Dado $\mathfrak{p} \in \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{V}(I_\alpha)$, se tiene que $\mathfrak{p} \supset I_\alpha$ para toda $\alpha \in \Lambda$ y por tanto $\mathfrak{p} \supset \sum\limits_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$, de donde $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}\left(\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha\right)$. Recíprocamente, si $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}\left(\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha\right)$, se tiene que $\mathfrak{p} \supset \sum\limits_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$. Ahora bien, para todo $\beta \in \Lambda$ se tiene
   $$\mathbf{I}_\beta \subset \sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha \subset \mathfrak{p}$$
   por lo que $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I_\beta)$ para todo $\beta \in \Lambda$ y así
   $$\mathfrak{p} \in \bigcap_{\beta \in \Lambda} \mathbf{V}(I_\beta) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{V}(I_\alpha).$$

3. Si $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(J)$ entonces $\sqrt{I} = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)} \mathfrak{p} \supset \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(J)} \mathfrak{p} = \sqrt{J}$. Recíprocamente, si $\sqrt{I} \supset \sqrt{J}$ entonces $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{J}$, pero
   $$\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$$
   por lo que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{J}$ y por tanto $\mathbf{V}(I \cap J) = \mathbf{V}(J)$. Por 1 de este lema, ya sabemos que $\mathbf{V}(I \cap J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$, así que $\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) = \mathbf{V}(J)$, de donde $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(J)$.

$\square$

El lema anterior nos dice que los conjuntos $\mathbf{V}(I)$, donde I es un ideal de R, satisfacen los axiomas de conjuntos cerrados en una topología. Enunciamos este hecho a manera de proposición.

Proposición 1.15. Existe una topología τ_z para $\operatorname{Spec}(R)$ cuyos conjuntos cerrados son los conjuntos $V(I)$, donde I es un ideal de R.

Demostración. Sea $\tau_z = \{\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(I) |\ I \text{ es ideal de } R\}$. Se tiene que τ_z es una topología para $\operatorname{Spec}(R)$:

1. $\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(1)$ y $\emptyset = \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(0)$.

2. Si $\{U_\alpha\}$ es una familia en τ_z entonces $U_\alpha = \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(I_\alpha)$, así que
$$\bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcup_\alpha (\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(I_\alpha)) = \operatorname{Spec}(R) \setminus \bigcap_\alpha \mathbf{V}(I_\alpha)$$
pero por el lema 1.14 se tiene
$$\operatorname{Spec}(R) \setminus \bigcap_\alpha \mathbf{V}(I_\alpha) = \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}\left(\sum_\alpha I_\alpha\right)$$
de donde $\bigcup_\alpha U_\alpha = \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}\left(\sum_\alpha I_\alpha\right) \in \tau_z$.

3. Si $U_1, U_2 \in \tau_z$ entonces probemos que $U_1 \cap U_2 \in \tau_z$. Tenemos que $U_j = \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(I_j)$, donde I_j es ideal de R para $j = 1, 2$. Así
$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 &= (\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(I_1)) \cap (\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(I_2)) \\ &= \operatorname{Spec}(R) \setminus (\mathbf{V}(I_1) \cup \mathbf{V}(I_2)) \\ &= \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(I_1 I_2) \end{aligned}$$
de donde $U_1 \cap U_2 \in \tau_z$.

□

Definición 1.16. La topología τ_z descrita en la proposición anterior es llamada la *topología de Zariski* para $\operatorname{Spec}(R)$.

Un subconjunto muy particular de $\operatorname{Spec}(R)$ es el formado por todos los ideales maximales de R y aunque en este trabajo no será tratado como subespacio, sí usaremos la siguiente notación para referirnos a sus elementos.
Notación. Para un anillo R dado denotamos por $\operatorname{Max}(R)$ al conjunto de todos los ideales maximales de R, es decir,
$$\operatorname{Max}(R) = \{\mathfrak{m} \subset R : \mathfrak{m} \text{ es ideal maximal}\}.$$

Daremos ahora una base para la topología de $\operatorname{Spec}(R)$. Para cada $f \in R$, denotamos $D(f) := \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(f)$.

Proposición 1.17. La familia $\{D(f)\}_{f\in R}$ forma una base para la topología de Zariski de $\operatorname{Spec}(R)$.

Demostración. Sea U un abierto de $\operatorname{Spec}(R)$. Se tiene entonces que $U = \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(I)$ para algún ideal I de R. Dado $\mathfrak{p} \in U$ se tiene que $\mathfrak{p} \not\supset I$, por lo que existe $f \in I \setminus \mathfrak{p}$, note que entonces $(f) \not\subset \mathfrak{p}$ y por tanto $\mathfrak{p} \in D(f)$. Afirmamos que $D(f) \subset U$. Observe que si $\mathfrak{q} \in \mathbf{V}(I)$ entonces $\mathfrak{q} \supset I \ni f$ y así $\mathfrak{q} \supset (f)$ y por tanto $\mathfrak{q} \in \mathbf{V}(f)$; es decir $\mathbf{V}(I) \subset \mathbf{V}(f)$ y de esta manera

$$U = \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(I) \supset \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(f) = D(f)$$

□

Los conjuntos $D(f)$ son llamados *abiertos básicos.* Algunas propiedades de estos abiertos son las siguientes.

Proposición 1.18. Sean $f, g \in R$.

1. $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.
2. $D(f) = \emptyset$ si y solo si f es nilpotente.
3. $D(f) = \operatorname{Spec}(R)$ si y solo si f es una unidad.
4. $D(f) = D(g)$ si y solo si $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.

Demostración.

1. $$\begin{aligned} D(f) \cap D(g) &= (\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(f)) \cap (\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(g)) \\ &= \operatorname{Spec}(R) \setminus (\mathbf{V}(f) \cup \mathbf{V}(g)) \\ &= \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(fg) \\ &= D(fg) \end{aligned}$$

2. Es claro por el inciso 4 de la proposición 1.13.

3. Si $D(f) = \operatorname{Spec}(R)$ entonces $\mathbf{V}(f) = \emptyset$. Si f no fuese unidad, existiría un ideal maximal, y por tanto primo, $\mathfrak{m}$ de R tal que $(f) \subset \mathfrak{m}$, y así $\mathbf{V}(f) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto f es unidad.
Recíprocamente, si f es unidad entonces $(f) = R$, por lo que $\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}(R) = \emptyset$ y así $D(f) = \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(f) = \operatorname{Spec}(R)$.

4. $D(f) = D(g)$ si y solo si $\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}(g)$, lo cual ocurre si y solo si $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.

□

1.2. Propiedades topológicas de Spec(R)

Ya que se le ha dado estructura de espacio topológico a Spec(R) es natural preguntarse acerca de las propiedades topológicas que pueda posser, algunas de ellas son la quasi-compacidad, conexidad y la irreducibilidad, además de ciertos axiomas de separación. Debido a la importancia de la irreducibilidad, la siguiente sección será exclusiva para su estudio.

Teorema 1.19. Sea R un anillo. Si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ son puntos distintos entonces existe un abierto de Spec(R) que contiene a $\mathfrak{p}$ o a $\mathfrak{q}$ pero no a ambos.

Demostración. Como $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, se tiene que $\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{q}$ o $\mathfrak{q} \nsubseteq \mathfrak{p}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathfrak{p} \nsubseteq \mathfrak{q}$. Existe entonces $f \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$. Con esto $(f) \subset \mathfrak{p}$, de donde $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(f)$ y así $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(f) = D(f)$. Afirmamos que $\mathfrak{q} \in D(f)$. Como $f \notin \mathfrak{q}$, entonces $(f) \nsubseteq \mathfrak{q}$, por lo que $\mathfrak{q} \notin \mathbf{V}(f)$ y por tanto $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(f) = D(f)$. □

Se dice que un espacio topológico X es un *espacio* T_0 si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$, existe un abierto U de X tal que $x \in U$ e $y \notin U$. El teorema anterior dice que Spec(R) es un espacio topológico T_0.

Un espacio topológico X se dice *quasi-compacto* si toda cubierta abierta de X posee una subcubierta finita. Si X es quasi-compacto y Hausdorff diremos que X es compacto.

Proposición 1.20. Cada $D(f)$ es quasi-compacto, en particular Spec(R) es quasi-compacto.

Demostración. Sea $f \in R$ y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta de $D(f)$. Como $\{D(g)\}_{g \in R}$ es base para la topología de Spec(R), podemos suponer que $U_\alpha = D(g_\alpha) = \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(g_\alpha)$, con $g_\alpha \in R$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} D(f) &= \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(g_\alpha)) \\ &= \operatorname{Spec}(R) \setminus \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{V}(g_\alpha) \\ &= \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}\left(\sum_{\alpha \in \Lambda} (g_\alpha) \right) \end{aligned}$$

y así $\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}\left(\sum_{\alpha \in \Lambda} (g_\alpha) \right)$ y por tanto $\sqrt{(f)} = \sqrt{\sum_{\alpha \in \Lambda} (g_\alpha)}$. Existe entonces $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \in \sum_{\alpha \in \Lambda} (g_\alpha)$; es decir $f^n = g_{\alpha_1} + \cdots + g_{\alpha_s}$. De esta manera

$(f^n) \subset \sum_{j=1}^{s} \left(g_{\alpha_j}\right)$, así que

$$\mathbf{V}(f) = \mathbf{V}\left(f^n\right) \supset \mathbf{V}\left(\sum_{j=1}^{s} \left(g_{\alpha_j}\right)\right)$$

y así

$$\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(f) \subset \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}\left(\sum_{j=1}^{s} \left(g_{\alpha_j}\right)\right), \tag{1.1}$$

pero $\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}(f) = D(f)$ y

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}\left(\sum_{j=1}^{s} \left(g_{\alpha_j}\right)\right) &= \operatorname{Spec}(R) \setminus \bigcap_{j=1}^{s} \mathbf{V}\left(g_{\alpha_j}\right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{s} \left(\operatorname{Spec}(R) \setminus \mathbf{V}\left(g_{\alpha_j}\right)\right) \\ &= \bigcup_{j=1}^{s} D\left(g_{\alpha_j}\right) \end{aligned}$$

así que de (1.1) se tiene $D(f) \subset \bigcup_{j=1}^{s} D\left(g_{\alpha_j}\right)$.

En particular, si $f = 1$ entonces $\operatorname{Spec}(R) = D(f)$ es quasi-compacto. □

Dado un espacio topológico X, una *separación* de X es un par de subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos E, F de X tales que $X = E \cup F$. El espacio X se dice *conexo* si no existe una separación de X. Antes de estudiar la conexidad del espacio topológico $\operatorname{Spec}(R)$ mencionaremos algunas definiciones y resultados previos.

Se dice que dos ideales I, J de un anillo R son *primos entre sí* si $I + J = R$. Equivalentemente, I y J son primos entre sí, si y solo si existen $a \in I$, $b \in J$ tales que $a + b = 1$.

Los ideales primos entre sí se usarán con frecuencia en este trabajo, es por ello que daremos una manera sencilla de mostrar que dos ideales dados son primos entre sí.

Proposición 1.21. Si I, J son ideales de R tales que $\sqrt{I} + \sqrt{J} = R$ entonces $I + J = R$.

Demostración. Por 3. y 4. de la proposición 1.6 tenemos que $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}} = \sqrt{R} = R$. Nuevamente por el inciso 3 de dicha proposición se sigue que $I + J = R$. $\square$

El siguiente resultado será usado frecuentemente en un capítulo posterior.

Corolario 1.22. Si $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_m \in \mathrm{Max}(R)$ son distintos entonces $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = R$ para todo $i \neq j$. Más aún $\mathfrak{m}_i^{n_i} + \mathfrak{m}_j^{n_n} = R$ para todos $i \neq j$ y $n_i, n_j \in \mathbb{N}$.

Demostración. Dado que $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ se tiene que $\mathfrak{m}_i \subsetneq \mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j$, y como $\mathfrak{m}_i$ es ideal maximal se sigue que $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = R$. Para mostrar la otra afirmación note que, por el corolario 1.7, se tiene $R = \mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = \sqrt{\mathfrak{m}_i^{n_1}} + \sqrt{\mathfrak{m}_j^{n_j}}$ y de la proposición 1.21 se sigue que $\mathfrak{m}_i^{n_i} + \mathfrak{m}_j^{n_j} = R$. $\square$

Recordemos que si $R_1, \ldots, R_n$ son anillos el producto cartesiano

$$\prod_{j=1}^{n} R_j = R_1 \times \cdots \times R_n$$

es anillo si se definen las operaciones suma y producto coordenada a coordenada. Este nuevo anillo es llamado el *producto directo* de $R_1, \ldots, R_n$. No es difícil verificar (véase por ejemplo [1]) que los ideales de $R := \prod_{j=1}^{n} R_j$ son de la forma $I := I_1 \times \cdots \times I_n$, donde I_j es ideal de R_j, y que

$$\mathrm{Spec}(R) = \left\{ \begin{array}{l|l} \mathfrak{p}_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n & \\ \vdots & \mathfrak{p}_j \in \mathrm{Spec}\,(R_j) \\ R_1 \times \cdots \times R_{n-1} \times \mathfrak{p}_n & \end{array} \right\}.$$

De manera particular, si $I_1, \ldots, I_n$ son ideales de un anillo R se tiene el producto directo $R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$. Consideremos ahora la función

$$\varphi : R \longrightarrow R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$$

definida mediante $\varphi\,(a) = (a + I_1, \ldots, a + I_n)$. Es claro que φ es morfismo de anillos. Respecto a este morfismo se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.23. (Teorema chino del residuo)[3, proposición 1.10, p.8].

1. Si I_j e I_l son primos entre sí cuando $j \neq l$, entonces $\prod_{j=1}^{n} I_j = \bigcap_{j=1}^{n} I_j$.

2. φ es suprayectivo si y solo si I_j e I_l son primos entre sí cuando $j \neq l$.

3. φ es inyectivo si y solo si $\bigcap_{j=1}^{n} I_j = 0$.

El siguiente corolario será de gran utilidad en la demostración del criterio de conexidad de Spec(R).

Corolario 1.24. Sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales de R tales que $I_i + I_j = R$ para todo $i \neq j$. Se tiene que $R/\bigcap_{j=1}^{n} I_j \cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$.

Demostración. Por 2. de la proposición anterior el morfismo

$$\varphi : R \longrightarrow R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$$

dado por $\varphi(a) = (a + I_1, \ldots, a + I_n)$ es suprayectivo. Es claro además que $\ker(\varphi) = I_1 \cap \cdots \cap I_n$. Del primer teorema de isomorfismo se tiene que $R/\bigcap_{j=1}^{n} I_j \cong R/I_1 \times \cdots \times R/I_n$. $\square$

Mencionamos ahora el criterio de conexidad para Spec(R).

Proposición 1.25. Dado un anillo R, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Spec(R) es disconexo.

2. Existen elementos $e_1, e_2 \in R$ no cero, tales que $e_1 e_2 = 0$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ y $e_1 + e_2 = 1$. Tales elementos son llamados *idempotentes ortogonales.*

3. R es isomorfo al producto directo $R_1 \times R_2$, donde R_1 y R_2 son anillos no cero.

Demostración.

1.⇒2. Supongamos que Spec(R) $= \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$, donde I, J son ideales de R, con $\mathbf{V}(I), \mathbf{V}(J) \neq \emptyset$ y $\mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J) = \emptyset$. Tenemos entonces que $I, J \neq R$, además $\emptyset = \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J) = \mathbf{V}(I + J)$ y entonces $I + J = R$, de donde existen $i \in I$, $j \in J$ tales que $i + j = 1$. Nótese que $i, j \neq 0, 1$. Por otro lado, dado que Spec(R) $= \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) = \mathbf{V}(IJ)$, se tiene que $IJ \subset$ Nil(R) y por tanto $(ij)^m = 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Como

$i + j = 1$ entonces $(i + j)^{2m} = 1$. Usando la fórmula del binomio de Newton podemos escribir

$$1 = (i + j)^{2m} = ai^m + bj^m$$

para algunos $a, b \in A$. Sean $e_1 = ai^m \in I$ y $e_2 = bj^m \in J$. Nótese que $e_1e_2 = abi^mj^m = 0$. Sólo hace falta ver que $e_1^2 = e_1$ y $e_2^2 = e_2$. Como $e_1 + e_2 = 1$, se tiene que $e_1^2 + 2e_1e_2 + e_2^2 = 1$, pero $e_1e_2 = 0$, y entonces $e_1^2 + e_2^2 = 1$, de aquí

$$e_2^2 = 1 - e_1^2 \tag{1.2}$$

De $e_1 + e_2 = 1$ se tiene $e_2^2 = 1 - 2e_1 + e_1^2$, así que sustituyendo en (1.2) se tiene $2\left(e_1 - e_1^2\right) = 0$ y por tanto $e_1^2 = e_1$. Análogamente se muestra que $e_2^2 = e_2$.

2.⇒3. Sean $I_1 = (e_1)$, $I_2 = (e_2)$, los ideales generados por e_1 y e_2. Observe que $I_1, I_2 \neq (0)$ pues $e_1, e_2 \neq 0$, y $1 \notin I_1$, de lo contrario e_1 sería unidad y la igualdad $e_1e_2 = 0$ implicaría $e_2 = 0$ lo cual no es posible. De la misma manera $1 \notin I_2$ y así $R/I_1, R/I_2$ no son triviales. Ahora, como $e_1 + e_2 = 1$, entonces $I_1 + I_2 = R$, así que por el corolario 1.24 tenemos $R/I_1 \cap I_2 \cong R/I_1 \times R/I_2$. Ahora, dado que $e_1e_2 = 0$, entonces $I_1I_2 = 0$, así que de 1 de la proposición 1.23 se sigue $I_1 \cap I_2 = I_1I_2 = 0$ y por tanto $R \cong (R/I_1) \times (R/I_2)$

3.⇒1. Si $R \cong R_1 \times R_2$, donde R_j son anillos no cero, entonces

$$\mathrm{Spec}(R) = \{\mathfrak{p} \times R_2, R_1 \times \mathfrak{q} | \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\left(R_1\right), \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\left(R_2\right)\}$$

Observe que entonces $F_1 = \{\mathfrak{p} \times R_2 : \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\left(R_1\right)\} = \mathrm{Spec}\left(R_1\right) \times R_2$ y $F_2 = R_1 \times \mathrm{Spec}\left(R_2\right)$ forman una separación de $\mathrm{Spec}(R)$, por lo que $\mathrm{Spec}(R)$ no es conexo.

□

1.3. Irreducibilidad

Como se dijo anteriormente, en esta sección se estudiará a fondo la irreducibilidad de $\mathrm{Spec}(R)$ y de sus subespacios. Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 1.26. Un espacio topológico no vacío X se dice *irreducible* si cada que $X = E \cup F$, donde E, F son cerrados de X, se tiene que $X = E$ o bien $X = F$. Un subespacio Y de X es irreducible si lo es bajo la topología de subespacio.

A continuación proporcionamos otros criterios de irreducibilidad.

Teorema 1.27. Sea X un espacio topológico no vacío. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es irreducible.

2. Para cada par de abiertos no vacíos U, V de X se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$.

3. Si U es un abierto no vacío de X entonces U es denso en X.

Demostración.

1.⇒2. Sean U, V abiertos no vacíos de X. Si $\emptyset = U \cap V$ entonces

$$X = (X \setminus U) \cup (X \setminus V) \tag{1.3}$$

Como U, V son abiertos no vacíos, $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son cerrados propios de X, así que (1.3) contradice la irreducibilidad de X, por tanto $U \cap V \neq \emptyset$.

2.⇒3. Es claro.

3.⇒1. Supongamos que X no es irreducible. Existen entonces dos cerrados propios E, F de X tales que $X = E \cup F$, así que $\emptyset = (X \setminus E) \cap (X \setminus F)$. Observe que $X \setminus E$ y $X \setminus F$ son abiertos no vacíos. Por hipótesis, el abierto no vacío $X \setminus E$ es denso en X y por tanto, para el abierto $X \setminus F$ se tiene que $(X \setminus E) \cap (X \setminus F) \neq \emptyset$, así que se tiene una contradicción. □

Dado un espacio topológico X y un subespacio Y de X, $\overline{Y}$ denotará a la cerradura de Y en X. Respecto a la irreducibilidad de los subespacios de un espacio topológico se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.28. Sea X un espacio topológico y sea $Y \neq \emptyset$ un subespacio de X. Se tiene que Y es irreducible si y solo si $\overline{Y}$ es irreducible.

Demostración. Supongamos que Y es irreducible. Sean $U, V \subset \overline{Y}$ dos abiertos no vacíos de $\overline{Y}$. Debemos ver que $U \cap V \neq \emptyset$. Tenemos $U = \overline{Y} \cap U'$ y $V = \overline{Y} \cap V'$, para algunos abiertos U', V' de X. Como U es no vacío, existe $p \in X$ con $p \in \overline{Y}$ y $p \in U'$, de donde $U' \cap Y \neq \emptyset$. De manera análoga $V' \cap Y \neq \emptyset$. Con esto, $U' \cap Y$ y $V' \cap Y$ son dos abiertos no vacíos del subespacio irreducible Y, así que

$$\emptyset \neq (Y \cap U') \cap (Y \cap V') \subset \left(\overline{Y} \cap U'\right) \cap \left(\overline{Y} \cap V'\right) = U \cap V.$$

Recíprocamente, sean U, V abiertos no vacíos de Y. Se tiene que $U = Y \cap U'$ y $V = Y \cap V'$ para algunos abiertos U', V' de X. Ahora $\overline{Y} \cap U' \subset \overline{Y}$ y $\overline{Y} \cap V' \subset \overline{Y}$ son abiertos en $\overline{Y}$ y son no vacíos pues $\emptyset \neq U = Y \cap U' \subset \overline{Y} \cap U'$ y de la misma manera $\emptyset \neq V = Y \cap V' \subset \overline{Y} \cap V'$. Dada la irreducibilidad de $\overline{Y}$ se tiene que

$$\overline{Y} \cap (U' \cap V') = \left(\overline{Y} \cap U'\right) \cap \left(\overline{Y} \cap V'\right) \neq \emptyset.$$

Por tanto, podemos tomar

$$Q \in \overline{Y} \cap (U' \cap V') . \tag{1.4}$$

Observe que, como U' y V' son abiertos en X, $U' \cap V'$ es abierto en X. De (1.4) se tiene que $Q \in \overline{Y}$ y $U' \cap V'$ es un abierto que contiene a Q, por lo que

$$\emptyset \neq (U' \cap V') \cap \overline{Y} = (U' \cap Y) \cap (V' \cap Y) = U \cap V$$

por lo que Y es irreducible. □

Los siguientes resultados y definiciones serán de suma importancia al estudiar la irreducibilidad de los subespacios de Spec(R).

Definición 1.29. Dado un subconjunto E de Spec(R), el *ideal de E en R* está definido por $\mathbf{I}(E) = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in E} \mathfrak{p}$.

Es claro que $\mathbf{I}(E)$ efectivamente es un ideal de R. Algunas propiedades de estos ideales de R se mencionan en la siguiente proposición.

Proposición 1.30. Sean E y F dos subconjuntos de Spec(R). Se tiene que

1. Si $E \subset F$ entonces $\mathbf{I}(E) \supset \mathbf{I}(F)$.
2. $\mathbf{I}(E \cup F) = \mathbf{I}(E) \cap \mathbf{I}(F)$.
3. $\mathbf{I}\left(\mathbf{V}(J)\right) = \sqrt{J}$ para cualquier ideal J de R.
4. $E \subset \mathbf{V}\left(\mathbf{I}(E)\right)$.

Demostración.

1. Supongamos que $E \subset F$. Si $a \in \mathbf{I}(F)$ entonces $a \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in F$, en particular se tiene que $a \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in E$, lo que muestra que $a \in \mathbf{I}(E)$.

2. Dado que $E, F \subset E \cup F$, por el inciso anterior $\mathbf{I}(E), \mathbf{I}(F) \supset \mathbf{I}(E \cup F)$, de donde $\mathbf{I}(E) \cap \mathbf{I}(F) \supset \mathbf{I}(E \cup F)$. Recíprocamente, dado $f \in \mathbf{I}(E) \cap \mathbf{I}(F)$ se tiene que $f \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in E$ y para todo $\mathfrak{p} \in F$, de donde $f \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in E \cup F$, luego, $f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in E \cup F} \mathfrak{p} = \mathbf{I}(E \cup F)$.

3. Por definición $\mathbf{I}(\mathbf{V}(J)) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(J)} \mathfrak{p}$ lo cual coincide, según la proposición 1.8, con $\sqrt{J}$.

4. Si $\mathfrak{q} \in E$ entonces $\mathfrak{q} \supset \bigcap_{\mathfrak{p} \in E} \mathfrak{p} = \mathbf{I}(E)$, es decir $\mathfrak{q} \in \mathbf{V}(\mathbf{I}(E))$ y por lo tanto $E \subset \mathbf{V}(\mathbf{I}(E))$.

$\square$

Observación 3.

a) Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ entonces $\mathfrak{p}$ es ideal radical, así que de 3. de la proposición anterior se tiene que $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$.

b) Si $E \subset \operatorname{Spec}(R)$ entonces $\mathbf{I}(E)$ es un ideal de R, así que $\mathbf{V}(\mathbf{I}(E))$ es un cerrado de $\operatorname{Spec}(R)$ y de 4. de la proposición anterior se sigue que $\overline{E} \subset \overline{\mathbf{V}(\mathbf{I}(E))} = \mathbf{V}(\mathbf{I}(E))$.

En la siguiente proposición se da la manera de calcular cerraduras de subespacios del espectro primo de un anillo, dicha proposición completa la observación previa.

Proposición 1.31. Para cualquier subconjunto E de $\operatorname{Spec}(R)$ se tiene que $\overline{E} = \mathbf{V}(\mathbf{I}(E))$.

Demostración. Sólo hace falta ver que $\mathbf{V}(I(E)) \subset \overline{E}$. Dado que $\overline{E}$ es un cerrado de $\operatorname{Spec}(R)$, tenemos que $\overline{E} = \mathbf{V}(J)$ para algún ideal J de R y dado que $E \subset \overline{E}$, se sigue que para todo $\mathfrak{p} \in E$, $\mathfrak{p} \supset J$, de donde $J \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in E} \mathfrak{p} = \mathbf{I}(E)$ y por tanto $\mathbf{V}(J) \supset \mathbf{V}(\mathbf{I}(E))$; es decir $\overline{E} \supset \mathbf{V}(\mathbf{I}(E))$. $\square$

Mencionaremos a continuación una caracterización de irreducibilidad de los subespacios cerrados de $\operatorname{Spec}(R)$ en términos algebraicos.

Teorema 1.32. Un subconjunto cerrado E de $\operatorname{Spec}(R)$ es irreducible si y solo si $\mathbf{I}(E) \in \operatorname{Spec}(R)$.

Demostración. Supongamos que el cerrado E es irreducible. Sean $f, g \in R$ tales que $fg \in \mathbf{I}(E) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in E} \mathfrak{p}$, entonces para todo $\mathfrak{p} \in E$ se tiene $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(f)$ o $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(g)$. Lo anterior muestra que $E = (E \cap \mathbf{V}(f)) \cup (E \cap \mathbf{V}(g))$. Como E es irreducible se tiene que, digamos, $E = E \cap \mathbf{V}(f)$, de donde $E \subset \mathbf{V}(f)$, de aquí que $f \in \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in E$ y por tanto $f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in E} \mathfrak{p} = \mathbf{I}(E)$. Esto concluye la prueba de que $\mathbf{I}(E)$ es un ideal primo. Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{I}(E) \in \operatorname{Spec}(R)$. Sean $E_1, E_2 \subset E$ cerrados tales que $E = E_1 \cup E_2$. De la proposición 1.30 se tiene

$$\mathbf{I}(E) = \mathbf{I}\left(E_1 \cup E_2\right) = \mathbf{I}\left(E_1\right) \cap \mathbf{I}\left(E_2\right).$$

Como $\mathbf{I}(E)$ es primo, por el corolario 1.12 podemos suponer que $\mathbf{I}(E) = \mathbf{I}\left(E_1\right)$, pero entonces $\overline{E} = \mathbf{V}\left(\mathbf{I}(E)\right) = \mathbf{V}\left(\mathbf{I}\left(E_1\right)\right) = \overline{E_1}$, esto por la proposición 1.31, y como $E, E_1 \subset \operatorname{Spec}(R)$ son cerrados se sigue que $E_1 = E$. Esto muestra que E es irreducible. $\square$

Una consecuencia del teorema anterior y de la observación 3 es el siguiente.

Corolario 1.33. $\mathbf{V}\left(\mathfrak{p}\right)$ es irreducible para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

Fijaremos ahora nuestra atención a ciertos subespacios irreducibles de un espacio topológico. Tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.34. Sea X un espacio topológico.

1. Cada subespacio irreducible de X está contenido en un subespacio maximal irreducible de X.

2. Los subespacios maximales irreducibles de X son cerrados y forman una cubierta para X.

Demostración.

1. Sea Y un subespacio irreducible de X y sea

$$\Sigma = \{Z \subset X \mid Z \text{ es irreducible y } Z \supset Y\},$$

ordenado parcialmente por inclusión. Observe que Σ es no vacío pues $Y \in \Sigma$. Sean $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \Sigma$ un subconjunto totalmente ordenado y $Z = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} Z_\alpha$. Note que $Y \subset Z$. Mostraremos ahora que Z es irreducible.

Sean $U, V \subset Z$ abiertos no vacíos. Tenemos $U = U \cap Z = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (U \cap Z_\alpha)$ y $V = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (V \cap Z_\alpha)$. Como U y V son no vacíos, existen $\alpha, \beta \in \Lambda$ tales que $U \cap Z_\alpha \neq \emptyset$ y $V \cap Z_\beta \neq \emptyset$. Como $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ está totalmente ordenado, sin perder generalidad, podemos suponer que $Z_\alpha \subset Z_\beta$, de donde $\emptyset \neq U \cap Z_\alpha \subset U \cap Z_\beta$. Con esto, $U \cap Z_\beta, V \cap Z_\beta$ son dos abiertos no vacíos de Z_β, y como Z_β es irreducible se tiene que

$$\emptyset \neq (U \cap Z_\beta) \cap (V \cap Z_\beta) = (U \cap V) \cap Z_\beta$$

Como $(U \cap V) \cap Z_\beta \subset U \cap V$ se tiene que $U \cap V \neq \emptyset$. Esto muestra la irreducibilidad de Z y por tanto $Z \in \Sigma$, y como $Z_\alpha \subset Z$ para todo $\alpha \in \Lambda$, se tiene que Z es una cota superior en Σ de $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Por el lema de Zorn se sigue que Σ tiene al menos un elemento maximal, el cual debe ser irreducible maximal de X conteniendo a Y.

2. Sea C un subespacio maximal irreducible de X. Por el eorema 1.28 $\overline{C}$ es también irreducible. Como $C \subset \overline{C}$ y C es maximal, se tiene que $C = \overline{C}$ o bien $\overline{C} = X$. Si $C = \overline{C}$ se tiene que C es cerrado. Si $\overline{C} = X$ entonces X es irreducible y X es su único subespacio maximal irreducible, de donde $C = X = \overline{C}$. En cualquier caso se tiene que C es cerrado. Observe ahora que, para cada $x \in X$, se tiene trivialmente que $\{x\}$ es irreducible y por tanto está contenido en un subespacio maximal irreducible C_x, además $X = \bigcup_{x\in X} \{x\} \subset \bigcup_{x\in X} C_x$.

□

Definición 1.35. Los subespacios maximales irreducibles del espacio topológico X se llaman *componentes irreducibles de* X.

El siguiente objetivo es investigar cómo son las componentes irreducibles de Spec(R). Para conseguir esto necesitamos teoría previa, misma que se usará en un capítulo posterior.

Definición 1.36. Dado un ideal propio I de R, se dice que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, con $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)$, es *minimal sobre* I si para todo $\mathfrak{q} \in \mathbf{V}(I)$ tal que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ se tiene que $\mathfrak{q} = I$ o bien $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Decimos que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ es *minimal de* R si es minimal sobre 0.

Ya que hemos definido a los primos minimales se enunciarán y probarán algunos resultados importantes acerca de estos, los cuales serán utilizados en secciones posteriores. El siguiente resultado muestra que siempre existen primos minimales sobre un ideal propio dado.

Teorema 1.37. Si I es un ideal propio de un anillo R entonces $V(I)$ tiene al menos un elemento minimal.

Demostración. Si $I \in \operatorname{Spec}(R)$ entonces I es minimal sobre sí mismo y terminamos. Supongamos entonces que $I \notin \operatorname{Spec}(R)$ y consideremos

$$\mathbf{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : \mathfrak{p} \supset I\}$$

parcialmente ordenado por inclusión. Como I es propio, por el inciso 3 de la observación 1, $\mathbf{V}(I) \neq \emptyset$. Ahora, si $\mathcal{C} = \{\mathfrak{p}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathbf{V}(I)$ es un subconjunto totalmente ordenado y

$$P = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathfrak{p}_\alpha$$

entonces P es ideal de R y además $I \subset P$. Veamos que $P \in \operatorname{Spec}(R)$ y así que $P \in \mathbf{V}(I)$. Sean $a, b \in R$ tales que $ab \in P$. Debemos ver que $a \in P$ o bien $b \in P$. Tenemos que $ab \in \mathfrak{p}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$, y así $a \in \mathfrak{p}_\alpha$ o $b \in \mathfrak{p}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Si $a \in \mathfrak{p}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$ terminamos. Supongamos entonces que $a \notin \mathfrak{p}_\beta$ para algún $\beta \in \Lambda$, esto implica que $a \notin \mathfrak{p}_\alpha$ para todo $\mathfrak{p}_\alpha \subset \mathfrak{p}_\beta$, pero así $b \in \mathfrak{p}_\alpha$ para todo $\mathfrak{p}_\alpha \subset \mathfrak{p}_\beta$ y por tanto $b \in \mathfrak{p}_\alpha$ para todo $\mathfrak{p}_\alpha$ conteniendo a $\mathfrak{p}_\beta$. De aquí, $b \in \mathfrak{p}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$; equivalentemente, $b \in P$. Esto muestra que P es ideal primo y por tanto que $P \in \mathbf{V}(I)$. Ahora bien, dado que $P \subset \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)$, se tiene que P es cota inferior de $\mathcal{C}$ en $\mathbf{V}(I)$, así que por el lema de Zorn, $\mathbf{V}(I)$ posee al menos un elemento minimal. □

En general la intersección de ideales primos de un anillo no es necesariamente un ideal primo, sin embargo, la demostración del teorema anterior da un caso en el que esto se cumple: Si $\mathcal{C}$ es un conjunto totalmente ordenado de ideales primos de un anillo R entonces $P = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}} \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

Denotaremos al conjunto de ideales primos minimales sobre el ideal propio I por $\operatorname{Min}_R(I)$, el cual es no vacío gracias al teorema anterior. Es claro que $\operatorname{Min}_R(I) \subset \mathbf{V}(I)$.

El siguiente resultado es una adaptación del teorema anterior y juega un papel muy importante para dar una caracterización alternativa del radical de un ideal. Antes de enunciarlo, debemos recordar (observación 1) que si I es un ideal propio de un anillo R entonces $\mathbf{V}(I)$ es no vacío.

Corolario 1.38. Si I es un ideal propio de R y $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)$ entonces existe $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}_R(I)$ tal que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.

La proposición 1.8 dice que el radical de un ideal I es la intersección de todos lo ideales primos de R que continenen a I. El siguiente resultado muestra que, cuando I es un ideal propio, basta con calcular la intersección de todos los ideales primos minimales sobre I para recuperar el radical de I.

Corolario 1.39. Sea I un ideal propio de un anillo R. Se tiene entonces que $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}_R(I)} \mathfrak{p}$.

Demostración. Dado que $\mathrm{Min}_R(I) \subset \mathbf{V}(I)$, tenemos

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}_R(I)} \mathfrak{p} \tag{1.5}$$

Por otro lado, por el corolario 1.38, para cada $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)$ existe $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Min}_R(I)$ tal que $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} \supset I$, de esta manera

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}_R(I)} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)} \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)} \mathfrak{p} = \sqrt{I} \tag{1.6}$$

De las relaciones (1.5) y (1.6) se tiene el resultado. □

El siguiente es el último resultado de este capítulo. Este nos dice cómo son las componentes irreducibles de $\mathrm{Spec}(R)$, conocimiento que será de relevancia para interpretar geométricamente una propiedad de los ideales n-absorbentes (ver los teoremas 2.11 y 3.11).

Teorema 1.40. Las componentes irreducibles de $X = \mathrm{Spec}(R)$ son los conjuntos cerrados $\mathbf{V}(\mathfrak{p})$ donde $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ es minimal de R.

Demostración. Sea C una componente irreducible de X. Por 2 del teorema 1.34 tenemos que C es cerrado y como es irreducible, por el teorema 1.32 $\mathbf{I}(C) \in \mathrm{Spec}(R)$, digamos, $\mathbf{I}(C) = \mathfrak{p}$ para algún $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. De esta manera

$$C = \overline{C} = \mathbf{V}(\mathbf{I}(C)) = \mathbf{V}(\mathfrak{p}).$$

Veamos que, de hecho, $\mathfrak{p}$ es minimal de R. Si $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ es tal que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ entonces $\mathbf{V}(\mathfrak{q}) \supset \mathbf{V}(\mathfrak{p}) = C$. Al ser C una componete irreducible y $\mathbf{V}(\mathfrak{q})$ irreducible, se tiene que $\mathbf{V}(\mathfrak{q}) = \mathbf{V}(\mathfrak{p})$ o bien $\mathbf{V}(\mathfrak{q}) = \mathrm{Spec}(R)$.

1. Si $\mathbf{V}(\mathfrak{q}) = \mathbf{V}(\mathfrak{p})$ entonces, por 3 del lema 1.14, $\mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{q}} = \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$
2. Si $\mathbf{V}(\mathfrak{q}) = \mathrm{Spec}(R)$ entonces $\mathrm{Spec}(R)$ es irreducible y como $C = \mathbf{V}(\mathfrak{p})$ es maximal irreducible, se tiene que $\mathbf{V}(\mathfrak{q}) = \mathrm{Spec}(R) = \mathbf{V}(\mathfrak{p})$ y entonces $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

Esto muestra que $\mathfrak{p}$ es primo minimal de R. Recíprocamente, sea $C = \mathbf{V}(\mathfrak{p})$ donde $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ es minimal de R. Por el inciso a) de la observación 3, C es irreducible. Veamos que C es maximal, para ello, sea $D = \mathbf{V}(\mathfrak{q})$, donde $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$, otro cerrado irreducible tal que $C \subset D$. Nuevamente por 3. del lema 1.14 se tiene entonces que $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$, y por la minimalidad de $\mathfrak{p}$ se tiene que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ o $\mathfrak{q} = 0$, de donde $C = D$ o $D = \mathrm{Spec}(R)$, por lo que C es maximal. $\square$

Capítulo 2

Ideales 2-absorbentes

Los ideales primos forman la clase más importante de ideales en la teoría de los anillos conmutativos. Los conceptos de primalidad y maximalidad son parte fundamental en las aplicaciones del álgebra conmutativa a la geometría algebraica, en ello radica la importancia de conseguir generalizaciones de estos conceptos. En este capítulo se definirán los ideales 2-absorbentes y algunas propiedades básicas de estos. Este concepto formulado por Ayman Badawi que surgió en el año 2007, es una de las generalizaciones más recientes de ideales primos y ha sido base para una gran cantidad de trabajos, entre ellos [2], el cual será desarrollado en el capítulo 3. Los resultados que se muestran en este capítulo forman parte de [4] y serán utilizados, la mayoría, en el capítulo siguiente.

Definición 2.1. Se dice que un ideal propio I de R es un ideal 2-*absorbente* de R si para todos $a, b, c \in R$ tales que $abc \in I$ se tiene que $ab \in I$ o $ac \in I$ o $bc \in I$.

Es claro que todo ideal primo es ideal 2-absorbente. Pero no todo ideal 2-absorbente es primo, por ejemplo, si $R = \mathbb{Z}$ e $I = 6\mathbb{Z}$ entonces I no es primo pues $2 \cdot 3 = 6 \in I$ pero $2, 3 \notin I$. Veamos ahora que I es ideal 2-absorbente. Supongamos que $abc \in I = 6\mathbb{Z}$, con $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Como $abc \in I \subset 2\mathbb{Z}$ y 2 es primo podemos suponer que $2|a$. Como también se tiene que $abc \in I \subset 3\mathbb{Z}$ y 3 es primo tenemos dos casos posibles, a saber, que $3|a$ o $3 \nmid a$. Si $3|a$ entonces $6|a$, de donde $6|ab$ y por tanto $ab \in I$. En el caso en que $3 \nmid a$ entonces $3|b$ o $3|c$, de donde $6|ab$ o $6|ac$ y así $ab \in I$ o $ac \in I$.
Este ejemplo muestra que hay más ideales 2-absorbentes que ideales primos.

El ejemplo anterior es un caso particular del siguiente resultado, el cual proporciona una manera de obtener ideales 2-absorbentes de un anillo.

Lema 2.2. Si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ son distintos entonces $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ es un ideal 2-absorbente de R.

Demostración. Si $a, b, c \in R$ son tales que $abc \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, en particular $abc \in \mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es primo podemos suponer, sin perder generalidad, que $a \in \mathfrak{p}$. Si $a \in \mathfrak{q}$ entonces $a \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ y por tanto $ab \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Supongamos entonces que $a \notin \mathfrak{q}$ y así, dado que $\mathfrak{q}$ es ideal primo y $abc \in \mathfrak{q}$, se tiene que $b \in \mathfrak{q}$ o $c \in \mathfrak{q}$, de donde $ab \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ o $ac \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. $\square$

La siguiente proposición caracteriza a todos los ideales 2-absorbentes de un DIP.

Proposición 2.3. Sea R un dominio de ideales principales. Un ideal propio I de R es 2-absorbente si y solo si $I \in \operatorname{Spec}(R)$, o $I = (p^2)$ para algún elemento primo $p \in R$, o bien $I = (p_1 p_2)$, donde $p_1, p_2 \in R$ son elementos primos distintos.

Demostración. Supongamos primero que I es ideal 2-absorbente de R. Si $I \in \operatorname{Spec}(R)$ no hay nada que hacer, por lo que podemos suponer que $I \notin \operatorname{Spec}(R)$. Dado que R es dominio de ideales principales y además I es propio y no primo, tenemos que $I = (a)$ para algún $a \in R$, a no nulo ni unidad, y por tanto $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$, donde $p_1, \ldots, p_m \in R$ son irreducibles (por tanto primos) y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{N}$. Veamos primero que $m \leq 2$. Si $m \geq 3$, dado que I es 2-absorbente, se tendría $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \in I$ o $p_1^{\alpha_1} (p_3^{\alpha_3} \cdots p_m^{\alpha_m}) \in I$ o $p_2^{\alpha_2} (p_3^{\alpha_3} \cdots p_m^{\alpha_m}) \in I$. En el primer caso se tendría que p_3 es unidad, en el segundo caso se tendría que p_2 es unidad y en el tercer caso se tendría que p_1 es unidad, en cualquier caso se tiene una contradicción, lo que muestra que $m \leq 2$. De esta manera $a = p_1^{\alpha_1}$ o $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. Consideremos cada uno de estos casos.

1. $a = p_1^{\alpha_1}$. Veamos que en este caso $\alpha_1 = 2$. Observe primero que $\alpha_1 \neq 1$ pues I no es primo. Si fuese $\alpha_1 \geq 3$ entonces $p_1 p_1 p_1^{\alpha_1 - 2} \in I = (p_1^{\alpha_1})$ y dado que I es 2-absorbente se tendría que $p_1^{\alpha_1 - 1} \in I$ o $p_1^2 \in I$, lo cual no es posible. Por tanto $\alpha_1 = 2$.

2. Si $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ entonces $I = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2})$. Mostraremos que en este caso $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Si $\alpha_1 \geq 2$ entonces I no es 2-absorbente, pues $p_1 p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \in I$, pero $p_1^{\alpha_1}, p_1 p_2^{\alpha_2}, p_1^{\alpha_1 - 1} p_2 \notin I$, lo cual es una contradicción. Se sigue que $\alpha_1 = 1$. De manera análoga se tiene que $\alpha_2 = 1$.

Recíprocamente, si $I \in \operatorname{Spec}(R)$ es 2-absorbente. Si $p_1, p_2 \in R$ son elementos primos distintos entonces $(p_1), (p_2) \in \operatorname{Spec}(R)$ son no nulos y entonces son ideales maximales de R, de donde $(p_1p_2) = (p_1) \cap (p_2)$ y por el lema 2.2 se tiene que (p_1p_2) es ideal 2-absorbente. Sólo falta ver que si $p \in R$ es elemento primo entonces (p^2) es ideal 2-absorbente. Sean $a, b, c \in R$ tales que $abc \in I = (p^2)$. Como $abc \in I \subset (p)$ y p es primo podemos suponer que $p|a$. Si $p^2|a$ entonces $p^2|ab$ y así $ab \in (p^2)$, supongamos así que $p^2 \nmid a$. Se sigue entonces que $p|b$ o $p|c$, luego $p^2|ab$ o $p^2|ac$; es decir $ab \in (p^2)$ o $ac \in (p^2)$. $\square$

2.1. Propiedades básicas de ideales 2-absorbentes

En esta sección se mencionarán algunas propiedades básicas que satisfacen los ideales 2-absorbentes. La primera propiedad interesante es que el radical de un ideal 2-absorbente es también 2-absorbente. El siguiente lema ayudará a probar este hecho.

Lema 2.4. Sea I un ideal 2-absorbente de R. Si $x \in R$ y $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, son tales que $x^n \in I$, entonces $x^{n-1} \in I$.

Demostración. Dado que I es ideal 2-absorbente y $n > 2$, $x \cdot x \cdot x^{n-2} = x^n \in I$ implica que $x^2 \in I$ o $x^{n-1} = x \cdot x^{n-2} \in I$. Si $x^{n-1} \in I$ termimanos, y si $x^2 \in I$, dado que I es ideal de R se tiene que $x^{n-1} = x^{n-3}x^2 \in I$. $\square$

Teorema 2.5. Si I es un ideal 2-absorbente de R entonces

1. $a^2 \in I$ para todo $a \in \sqrt{I}$.

2. $\sqrt{I}$ es ideal 2-absorbente de R.

Demostración.

1. Si $a \in \sqrt{I}$ entonces $a^m \in I$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Si $m \leq 2$ es claro que $a^2 \in I$, y si $m > 2$ por el lema 2.4 se sigue que $a^{m-1} \in I$. Si $m - 1 = 2$ terminamos y si $m - 1 > 2$ por el mismo lema se tiene que $a^{m-3} \in I$. Aplicando el lema 2.4 las veces que sea necesario se tiene que $a^2 \in I$.

2. Sean $a, b, c \in R$ tales que $abc \in \sqrt{I}$. Por el inciso anterior se tiene que $a^2b^2c^2 = (abc)^2 \in I$ y, como I es 2-absorbente, $(ab)^2 = a^2b^2 \in I$ o $(ac)^2 = a^2c^2 \in I$ o bien $(bc)^2 = b^2c^2 \in I$, de donde $ab \in \sqrt{I}$ o $ac \in \sqrt{I}$ o $bc \in \sqrt{I}$. Esto concluye la prueba de que $\sqrt{I}$ es ideal 2-absorbente de R.

$\square$

Se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.6. Si I es un ideal 2-absorbente de R entonces $\left(\sqrt{I}\right)^2 \subset I$.

Demostración. Sean $x, y \in \sqrt{I}$. Mostraremos que $xy \in I$, es decir, que todos los generadores de $\left(\sqrt{I}\right)^2$ pertenecen a I.
Por el teorema 2.5 se tiene que $x^2, y^2 \in I$, de donde $x^2y, y^2x \in I$ y así

$$xy\,(x+y) = x^2y + y^2x \in I.$$

Dado que I es ideal 2-absorbente se sigue que $xy \in I$ o $x^2+xy = x(x+y) \in I$ o $xy+y^2 = y(x+y) \in I$. Si $x^2+xy \in I$ o $xy+y^2 \in I$, dado que $x^2, y^2 \in I$, se tiene que $xy \in I$, así que en cualquier caso se tiene que $xy \in I$. □

El lema 2.8 proporciona una caracterización de los ideales primos minimales sobre un ideal I y será de gran utilidad para proporcionar una cota superior de el número de ideales primos que son minimales sobre un ideal 2-absorbente. Recordemos que, por el teorema 1.37, $\mathrm{Min}_R(I) \neq \emptyset$. Cabe mencionar ahora que, si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Min}_R(I)$ son distintos entonces estos son incomparables pues cualquier contención entre ellos implicaría igualdad por minimalidad, lo cual no es posible. Enunciamos un resultado previo.

Lema 2.7. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ minimal de R. Si $x \in \mathfrak{p}$ entonces existen $y \in R \setminus \mathfrak{p}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $yx^n = 0$.

Demostración. Si $x = 0$ tomando $y = 1 \in R \setminus \mathfrak{p}$ y $n = 1 \in \mathbb{N}$ terminamos, por lo que podemos suponer que $x \neq 0$. Sea

$$S := \left\{ yx^k : y \in R \setminus \mathfrak{p} \text{ y } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Es claro que $S \subset R$ y $1 = 1 \cdot x^0 \in S$, además, si $y_1x^{k_1}, y_2x^{k_2} \in S$ entonces $y_1y_2x^{k_1+k_2} = \left(y_1x^{k_1}\right)\left(y_2x^{k_2}\right) \in S$ pues claramente $k_1 + k_2 \geq 0$ y como $\mathfrak{p}$ es primo y $y_1, y_2 \notin \mathfrak{p}$ entonces $y_1y_2 \notin \mathfrak{p}$. Veamos ahora que $0 \in S$. Si $0 \notin S$ entonces $S^{-1}R \neq 0$ así que por el teorema 1.37 existe $\hat{\mathfrak{q}} \in \mathrm{Spec}\left(S^{-1}R\right)$ que es minimal de $S^{-1}R$ y por el inciso (iv) de [17, teorema 5.32, p.94] existe $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$, con $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$, tal que $\hat{\mathfrak{q}} = S^{-1}\mathfrak{q}$. Como $x \in S$ se sigue que $x \notin \mathfrak{q}$ de donde $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Ahora bien, $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ implica que $\mathfrak{q} \subset R \setminus S$ y por otro lado $R \setminus \mathfrak{p} \subset S$ pues para todo $y \in R \setminus \mathfrak{p}$ se satisface $y = yx^0$, se sigue que $R \setminus S \subset \mathfrak{p}$ y así $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ lo cual no es posible por la minimalidad de $\mathfrak{p}$. Se tiene entonces que $0 \in S$, por lo que existen $y \in R \setminus \mathfrak{p}$ y $n \geq 0$ tales que $yx^n = 0 \in \mathfrak{p}$. Para terminar, observe que como $y \notin \mathfrak{p}$ entonces $n \in \mathbb{N}$. □

Lema 2.8. Sean $I, \mathfrak{p}$ ideales de un anillo R tales que $\mathfrak{p} \in \mathbf{V}(I)$. Se tiene que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}_R(I)$ si y solo si para cada $a \in \mathfrak{p}$ existe $b \in R \setminus \mathfrak{p}$ así como $n \in \mathbb{N}$ tales que $ba^n \in I$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{p}$ es primo minimal sobre I y sea $a \in \mathfrak{p}$. En el anillo cociente R/I se tiene que $\mathfrak{p}/I$ es primo minimal y $a + I \in \mathfrak{p} + I$. Por el lema anterior existen $b + I \in (R/I) \setminus (\mathfrak{p}/I)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $ba^n + I = (b + I)(a + I)^n = \bar{0}$, de donde $ba^n \in I$. Recíprocamente, supongamos que existe $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ tal que $I \subsetneq \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ existiría $x \in \mathfrak{p}$ tal que $x \notin \mathfrak{q}$, así que por hipótesis existen $y \in R \setminus \mathfrak{p}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $yx^n \in I \subset \mathfrak{q}$. Dado que $x \notin \mathfrak{q}$ se sigue que $y \in \mathfrak{q}$ y entonces $y \in \mathfrak{p}$ lo cual es una contradicción. Se tiene así que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ y por tanto $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}_R(I)$. □

Lema 2.9. Sea I un ideal 2-absorbente de R y supongamos que $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Min}_R(I)$. Si $x_1 \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_2$ y $x_2 \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$ entonces $x_1x_2 \in I$.

Demostración. Como $\mathfrak{p}_1$ es minimal sobre I, por el lema 2.8, existen $c_2 \notin \mathfrak{p}_1$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $c_2x_1^n \in I$. Veamos que de hecho $c_2x_1 \in I$. Si $n = 1$ la afirmación es clara, por lo que podemos suponer que $n > 1$. Observe que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_1^m \notin I$ pues de lo contrario, como $I \subset \mathfrak{p}_1$, se tendría que $x_1 \in \mathfrak{p}_1$, lo cual no puede ocurrir. Dado que I es 2-absorbente la relación

$$c_2x_1x_1^{n-1} = c_2x_1^n \in I$$

implica que $c_2x_1 \in I$ o $c_2x_1^{n-1} \in I$ o bien $x_1^n \in I$, pero $x_1^n \notin I$, así que $c_2x_1 \in I$ o $c_2x_1^{n-1} \in I$. Si $c_2x_1 \in I$ terminamos; examinemos entonces el caso $c_2x_1^{n-1} \in I$. Tenemos dos posibles casos para $n - 1 \in \mathbb{N}$, a saber

1. $n - 1 = 1$;

2. $n - 1 > 1$

Si $n - 1 = 1$ habremos terminado; y si $n - 1 > 1$ entonces $c_2x_1x_1^{n-2} = c_2x_1^{n-1} \in I$ y $x_1^{n-2} \notin I$ implican que $c_2x_1 \in I$ o $c_2x_1^{n-2} \in I$. Aplicando este procedimiento inductivamente se tiene que $c_2x_1 \in I$. Ahora, dado que $\mathfrak{p}_2$ es minimal sobre I, se tiene que $c_1x_2^m \in I$ para algunos $c_1 \notin \mathfrak{p}_2$ y $m \in \mathbb{N}$ y de manera análoga se tiene que $c_1x_2 \in I$. Por otro lado, dado que $I \subset \mathfrak{p}_1$ y $c_1x_2 \in I$, se tiene que $c_1x_2 \in \mathfrak{p}_1$, pero $x_2 \notin \mathfrak{p}_1$, así que $c_1 \in \mathfrak{p}_1$. Análogamente $c_2 \in \mathfrak{p}_2$, de donde $c_1 \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_2$ y $c_2 \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$ y así $c_1 + c_2 \notin \mathfrak{p}_1$ y $c_1 + c_2 \notin \mathfrak{p}_2$ Ahora bien, como $c_2x_1, c_1x_2 \in I$ entonces $c_2x_1x_2, c_1x_1x_2 \in I$, luego

$$(c_1 + c_2)\, x_1x_2 = c_2x_1x_2 + c_1x_1x_2 \in I,$$

al ser I ideal 2-absorbente, se sigue que $(c_1 + c_2)\, x_1 \in I$ o $(c_1 + c_2) \in I$ o $x_1 x_2 \in I$. Para terminar observe que $(c_1 + c_2)\, x_1 \in I$ no puede ocurrir, pues de lo contrario, como $I \subset \mathfrak{p}_2$, se tendría $(c_1 + c_2)\, x_1 \in \mathfrak{p}_2$ lo cual es una contradicción pues $c_1 + c_2, x_1 \notin \mathfrak{p}_2$. Por razones similares $(c_1 + c_2)\, x_2 \notin I$, así que $x_1 x_2 \in I$. □

Teorema 2.10. Si I es un ideal 2-absorbente de R entonces $|\mathrm{Min}_R(I)| \leq 2$.

Demostración. Supongamos que $|\mathrm{Min}_R(I)| \geq 3$. Sean $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 \in \mathrm{Min}_R(I)$ tales que $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ si $i \neq j$. Por el teorema de evasión de primos tenemos que $\mathfrak{p}_1 \not\subseteq (\mathfrak{p}_2 \cup \mathfrak{p}_3)$, $\mathfrak{p}_2 \not\subseteq (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_3)$ y $\mathfrak{p}_3 \not\subseteq (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2)$, por lo que existen $y_1 \in \mathfrak{p}_1 \setminus (\mathfrak{p}_2 \cup \mathfrak{p}_3)$, $y_2 \in \mathfrak{p}_2 \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_3)$, $y_3 \in \mathfrak{p}_3 \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2)$. Por el lema 2.9 se tiene que $y_1 y_2 \in I$ y dado que $I \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_3$, tenemos $y_1 y_2 \in \mathfrak{p}_3$, lo cual es una contradicción pues $y_1, y_2 \notin \mathfrak{p}_3$. Se sigue que $|\mathrm{Min}_R(I)| \leq 2$. □

El teorema anterior tiene la siguiente interpretación geométrica interesante.

Teorema 2.11. Si I es un ideal 2-absorbente de R entonces $\mathrm{Spec}\,(R/I)$ tiene a lo más dos componentes irreducibles.

Demostración. Por el teorema anterior R/I tiene a lo más dos ideales primos minimales y del teorema 1.40 se sigue el resultado. □

Ahora que ya se sabe que hay a lo más dos ideales primos minimales sobre un ideal 2-absorbente podemos tener una idea más exacta sobre cómo es su radical, ya que por el corolario 1.33 $\sqrt{I} = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}_R(I)} \mathfrak{p}$, así que, si I es un ideal 2-absorbente de R entonces $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ para algún $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ o $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, donde $\mathrm{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$ y $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$ (recuerde que $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ son incomparables).

Teorema 2.12. Sea I un ideal 2-absorbente de R.

1. Si $\sqrt{I} = \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ entonces $\mathfrak{p}^2 \subset I$.

2. Si $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, donde $\mathrm{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$ y $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$, entonces $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \subset I$ y $\left(\sqrt{I}\right)^2 \subset I$.

Demostración.

1. Se sigue directamente del corolario 2.6 pues $\mathfrak{p}^2 = \left(\sqrt{I}\right)^2 \subset I$.

2. Por el corolario 2.6 ya se tiene que $\left(\sqrt{I}\right)^2 \subset I$. Falta ver que $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset I$. Mostraremos que todos los generadores de $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ pertenecen a I, para ello, sean $x \in \mathfrak{p}_1$, $y \in \mathfrak{p}_2$, el objetivo entonces es probar que $xy \in I$. Tenemos los siguientes casos, siendo los últimos dos análogos entre sí

   a) $x \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, $y \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$,

   b) $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_2$, $y \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$,

   c) $x \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, $y \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$,

   d) $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_2$, $y \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$.

   En el caso *a*) se tiene que $x, y \in \sqrt{I}$, por lo que $xy \in \left(\sqrt{I}\right)^2$ y por el corolario 2.6 se tiene que $xy \in I$. En el caso *b*) del lema 2.9 se tiene que $xy \in I$. Supongamos ahora el caso *c*), es decir que $x \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, $y \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$. Dado que $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ son incomparables, existe $c \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_2$, nuevamente por el lema 2.9 tenemos $cy \in I$. Ahora bien, dado que $x, c \in \mathfrak{p}_1$ y $c \notin \mathfrak{p}_2$, tenemos que $x + c \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_2$, y como $y \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$, por el lema 2.9 se concluye que $xy + cy = (x + c)y \in I$, de donde $xy \in I$ pues $cy \in I$.

$\square$

Los siguientes teoremas describen propiedades muy interesantes que satisface un ideal 2-absorbente que no es radical.
Dado un ideal I de R, para $x \in R$, denotaremos por $\mathscr{I}_x$ al conductor de x en I, es decir

$$\mathscr{I}_x = (I :_R x) := \{y \in R | yx \in I\}.$$

Teorema 2.13. Sea I un ideal 2-absorbente de R tal que $I \neq \sqrt{I} = \mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Para cada $x \in \mathfrak{p} \setminus I$ se tiene que $\mathscr{I}_x \in \operatorname{Spec}(R)$ y es tal que $\mathfrak{p} \subset \mathscr{I}_x$. Además, para cualesquiera $x, y \in \mathfrak{p} \setminus I$ se tiene que $\mathscr{I}_x \subset \mathscr{I}_y$ o bien $\mathscr{I}_y \subset \mathscr{I}_x$.

Demostración. Sea $x \in \mathfrak{p} \setminus I$. Mostraremos primero que $\mathfrak{p} \subset \mathscr{I}_x$. Dado $a \in \mathfrak{p}$, debemos mostrar que $ax \in I$. Notemos que, como $x, a \in \mathfrak{p}$, $ax \in \mathfrak{p}^2$, por el inciso 1 del teorema 2.12 se sigue que $ax \in I$. Así $a \in \mathscr{I}_x$ y entonces $\mathfrak{p} \subset \mathscr{I}_x$. Veamos ahora que $\mathscr{I}_x \in \operatorname{Spec}(R)$. Si $\mathscr{I}_x = \mathfrak{p}$ terminamos, supongamos entonces que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathscr{I}_x$ y que $ab \in \mathscr{I}_x$ para algunos $a, b \in R$. Si $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$, como $\mathfrak{p} \subset \mathscr{I}_x$, entonces terminaríamos; supongamos así que $a, b \notin \mathfrak{p}$ y por tanto $ab \notin \mathfrak{p}$. Al tenerse $I \subset \sqrt{I} = \mathfrak{p}$, se tiene también que $ab \notin I$. Como $ab \in \mathscr{I}_x$ entonces $abx \in I$, dado que I es ideal 2-absorbente y $ab \notin I$, se

sigue que $ax \in I$ o bien $bx \in I$, es decir $a \in \mathscr{I}_x$ o $b \in \mathscr{I}_x$, lo que muestra que $\mathscr{I}_x$ es ideal primo.
Para mostrar la última parte sean $x, y \in \mathfrak{p} \setminus I$ y supongamos que $\mathscr{I}_x \nsubseteq \mathscr{I}_y$. Mostraremos que $\mathscr{I}_y \subset \mathscr{I}_x$. Sea $a \in I_y$. Debemos mostrar que $a \in \mathscr{I}_x$. Por lo demostrado anteriormente, $\mathfrak{p} \subset \mathscr{I}_x$, así que, si pasara que $a \in \mathfrak{p}$ habríamos terminado. Supongamos así que $a \notin \mathfrak{p}$. Como $\mathscr{I}_x \nsubseteq \mathscr{I}_y$, existe $c \in \mathscr{I}_x$ tal que $c \notin \mathscr{I}_y$ y dado que $\mathfrak{p} \subset \mathscr{I}_y$, $c \notin \mathfrak{p}$. De esta manera $ac \notin \mathfrak{p}$ y como antes, $ac \notin I$. Ahora bien, $a \in \mathscr{I}_y$ y $c \in \mathscr{I}_x$ implica $ay, cx \in I$, así que $acy, acx \in I$, de donde

$$ac(x + y) = acx + acy \in I. \tag{2.1}$$

Como I es 2-absorbente y $ac \notin I$ de la relación anterior se tiene que $a(x+y) \in I$ o $cx+cy = c(x+y) \in I$. La relación $cx+cy = c(x+y) \in I$ no se puede dar pues $c \notin \mathscr{I}_y$ y $c \in \mathscr{I}_x$. Concluimos así que $ax + ay = a(x + y) \in I$ y como $a \in I_y$, la relación $ax+ay = a(x+y) \in I$ implica $ax \in I$ o, equivalentemente, $a \in \mathscr{I}_x$. □

En los teoremas 2.14 y 2.15 se supondrá que $\mathrm{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$, donde $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$.

Teorema 2.14. Sea I un ideal 2-absorbente de R tal que $I \subsetneq \sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$. Si $x \in \sqrt{I} \setminus I$ entonces $\mathscr{I}_x \in \mathrm{Spec}(R)$ y es tal que $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset \mathscr{I}_x$.

Demostración. Mostraremos primero que $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset \mathscr{I}_x$. Como $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, se tiene que $x \in \mathfrak{p}_1$ y $x \in \mathfrak{p}_2$. Por el inciso 2 del teorema 2.12, $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset I$, así que $x\mathfrak{p}_1 \subset I$ y $x\mathfrak{p}_2 \subset I$ y por tanto $\mathfrak{p}_1 \subset \mathscr{I}_x$ y $\mathfrak{p}_2 \subset \mathscr{I}_x$.Veamos ahora que $\mathscr{I}_x \in \mathrm{Spec}(R)$. Supongamos que $ab \in \mathscr{I}_x$ para algunos $a, b \in R$. Como $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset \mathscr{I}_x$, si $a \in (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2)$ o $b \in (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2)$ entonces $a \in \mathscr{I}_x$ o $b \in \mathscr{I}_x$ y terminamos. Supongamos entonces que $a, b \notin \mathfrak{p}_1$ y $a, b \notin \mathfrak{p}_2$, con esto $ab \notin \mathfrak{p}_1$ y $ab \notin \mathfrak{p}_2$ y como además $I \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ entonces $ab \notin I$. Ahora bien, $ab \in \mathscr{I}_x$ implica que $abx \in I$ y dado que I es 2-absorbente y $ab \notin I$, se tiene que $ax \in I$ o $bx \in I$; es decir, $a \in \mathscr{I}_x$ o $b \in \mathscr{I}_x$. □

Teorema 2.15. Sea I un ideal 2-absorbente de R tal que $I \subsetneq \sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$. Para cualesquiera $x, y \in \sqrt{I} \setminus I$ se tiene que $\mathscr{I}_y \subset \mathscr{I}_x$ o bien, $\mathscr{I}_x \subset \mathscr{I}_y$.

Demostración. Sean $x, y \in \sqrt{I} \setminus I$ y supongamos que $\mathscr{I}_x \nsubseteq \mathscr{I}_y$, mostraremos que $\mathscr{I}_y \subset \mathscr{I}_x$. Como $\mathscr{I}_x \nsubseteq \mathscr{I}_y$ existe $c \in \mathscr{I}_x$ tal que $c \notin \mathscr{I}_y$, así que $cx \in I$ y $cy \notin I$, nótese que $cx + cy \notin I$. Por el teorema 2.14, $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset \mathscr{I}_y$, de donde $c \notin \mathfrak{p}_1$ y $c \notin \mathfrak{p}_2$. Sea $a \in \mathscr{I}_y$, mostremos que $a \in \mathscr{I}_x$. Como $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset \mathscr{I}_x$, si $a \in \mathfrak{p}_1$ o $a \in \mathfrak{p}_2$ entonces $a \in \mathscr{I}_x$ y por tanto terminaríamos. Supongamos entonces que $a \notin \mathfrak{p}_1$ y $a \notin \mathfrak{p}_2$, con esto $a, c \notin \mathfrak{p}_1$ $a, c \notin \mathfrak{p}_2$, $ac \notin \mathfrak{p}_1$ y $ac \notin \mathfrak{p}_2$

y entonces $ac \notin I$. Tenemos que $cx \in I$ y como $a \in \mathscr{I}_y$, $ay \in I$ por lo que $acx, acy \in I$, de aquí que

$$ac(x+y) = acx + acy \in I. \tag{2.2}$$

Dado que I es 2-absorbente, $ac \notin I$ y $cx + cy \notin I$, tenemos $ax + ay = a(x+y) \in I$ y como $a \in \mathscr{I}_y$, se sigue que $ax \in I$; es decir, $a \in \mathscr{I}_x$. Esto temina la prueba de que $\mathscr{I}_y \subset \mathscr{I}_x$. □

A continuación se proporcionan un par de caracterizaciones de ideales 2-absorbentes que no sean radicales, estas dependen del número de ideales primos minimales que el ideal posea.

Teorema 2.16. Sea I un ideal de R tal que $\sqrt{I} \in \operatorname{Spec}(R)$ e $I \subsetneq \sqrt{I}$. I es ideal 2-absorbente de R si y solo si $\mathscr{I}_x \in \operatorname{Spec}(R)$ para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$.

Demostración. Si I es 2-absorbente e $I \subsetneq \sqrt{I} = \mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, por el teorema 2.13 se tiene que $\mathscr{I}_x \in \operatorname{Spec}(R)$ para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$. Para la afirmación recíproca, supongamos que $abc \in I$ para algunos $a, b, c \in R$. Dado que $I \subsetneq \sqrt{I} = \mathfrak{p}$, entonces $abc \in \mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es ideal primo alguno de a, b o c pertenece a $\mathfrak{p}$, digamos $a \in \mathfrak{p}$. Si $a \in I$ entonces $ab \in I$ y terminamos, por lo que podemos suponer que $a \notin I$ y así, por hipótesis $\mathscr{I}_a$ es ideal primo de R. Dado que $abc \in I$, se sigue que $bc \in \mathscr{I}_a$, de donde $b \in \mathscr{I}_a$ o $c \in \mathscr{I}_a$, es decir, $ab \in I$ o $ac \in I$. Esto concluye la prueba de que I es 2-absorbente. □

Teorema 2.17. Sea I un ideal de R tal que $I \subsetneq \sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, donde $\operatorname{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$ y $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. I es ideal 2-absorbente de R.
2. $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset I$ e $\mathscr{I}_x \in \operatorname{Spec}(R)$ para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$.
3. $\mathscr{I}_x \in \operatorname{Spec}(R)$ para todo $x \in (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2) \setminus I$.

Demostración.

1.⇒2. Esta implicación es clara por el inciso 2 del teorema 2.12 y el lema 2.14.

2.⇒3. Dado $x \in (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2) \setminus I$ se tiene que $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus I$ o $x \in \mathfrak{p}_2 \setminus I$. Supongamos que $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus I$. Si $x \in \mathfrak{p}_2$ entonces $x \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \sqrt{I}$, de donde $x \in \sqrt{I} \setminus I$ y por hipótesis $\mathscr{I}_x$ es ideal primo de R, así que podemos suponer que $x \notin \mathfrak{p}_2$. Mostraremos que $\mathscr{I}_x = \mathfrak{p}_2$. Sea $y \in \mathfrak{p}_2$, como $x \in \mathfrak{p}_1$, se tiene que $xy \in \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset I$, de donde $y \in \mathscr{I}_x$. Recíprocamente, si $y \in \mathscr{I}_x$

entonces $xy \in I$. Dado que $I \subsetneq \sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_2$ y $x \notin \mathfrak{p}_2$, se tiene que $y \in \mathfrak{p}_2$, lo que muestra que $\mathscr{I}_x = \mathfrak{p}_2$. De manera análoga, para el caso $x \in \mathfrak{p}_2 \setminus I$, se tiene que $\mathscr{I}_x = \mathfrak{p}_1$. En cualquier caso se tiene que $\mathscr{I}_x$ es ideal primo de R.

3.⇒1. Supongamos que $abc \in I$ para algunos $a, b, c \in R$. Si $a \in I$ o $b \in I$ o $c \in I$ es claro que alguno de ab, ac o bc pertenecen a I. Supongamos entonces que $a, b, c \notin I$. Dado que $abc \in I \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, en particular se tiene que $abc \in \mathfrak{p}_1$ y como $\mathfrak{p}_1$ es primo podemos suponer que $a \in \mathfrak{p}_1$. Tenemos entonces $a \in (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2) \setminus I$, así que por hipótesis $\mathscr{I}_a$ es ideal primo de R. Para teminar, como $abc \in I$ se tiene que $bc \in \mathscr{I}_a$, de donde $b \in \mathscr{I}_a$ o $c \in \mathscr{I}_a$; es decir, $ab \in I$ o $ac \in I$.

□

Corolario 2.18. Si I es un ideal 2-absorbente de R tal que $I \subsetneq \sqrt{I}$ entonces $\mathscr{I}_x \in \operatorname{Spec}(R)$ para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$ y además para cualesquiera $x, y \in \sqrt{I} \setminus I$ se tiene que $\mathscr{I}_x \subset \mathscr{I}_y$ o bien $\mathscr{I}_y \subset \mathscr{I}_x$.

El siguiente ejemplo ilustra el teorema 2.17.

Ejemplo 1. Sean $R = \mathbb{Z}[x, y]$, $\mathfrak{p}_1 = (2, x)$ y $\mathfrak{p}_2 = (2, y)$. Veamos que $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Spec}(R)$. Sea $\psi : R \longrightarrow \mathbb{Z}_2[y]$ dada por $f(x, y) \mapsto \overline{f(0, y)}$, donde $\overline{f(0, y)}$ denota al polinomio en $\mathbb{Z}_2[y]$ que resulta de $f(0, y)$ al tomar sus coeficientes módulo 2. Es claro que ψ es epimorfismo de anillos: Si $\sum_{i=0}^{m} \overline{a_i} y^i \in \mathbb{Z}_2[y]$ entonces $g = \sum_{i=0}^{m} a_i y^i \in \mathbb{Z}[y] \subset \mathbb{Z}[x, y]$ es tal que $\psi(g) = \sum_{i=0}^{m} \overline{a_i} y^i$. Mostraremos ahora que $\ker \psi = \mathfrak{p}_1$. Si $f \in \mathfrak{p}_1$ entonces $f = 2g + xh$ para algunos $g, h \in \mathbb{Z}[x, y]$, es claro entonces que $\psi(f) = \overline{0}$. Recíprocamente, sea $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m \in \ker \psi$, donde $a_j \in \mathbb{Z}[y]$. Como $\psi(f) = \overline{0}$, entonces $\overline{a_0(y)} = \overline{0}$, de donde los coeficientes de a_0 son todos múltiplos de 2; es decir, $a_0 = 2p$ para algún $p \in \mathbb{Z}[y] \subset \mathbb{Z}[x, y]$. Se sigue que

$$f = 2p + a_1 x + \cdots + a_m x^m = 2p + x\left(a_1 + \cdots + a_m x^{m-1}\right) = 2p + xq$$

donde $q = a_1 + \cdots + a_m x^{m-1} \in \mathbb{Z}[x, y]$. Se sigue que $f \in (2, x) = \mathfrak{p}_1$ y $\ker \psi = \mathfrak{p}_1$. Por el primer teorema de isomorfismo, se sigue que $R/\mathfrak{p}_1 \cong \mathbb{Z}_2[y]$, el cual es dominio entero, y por tanto $\mathfrak{p}_1$ es ideal primo de R. De manera análoga se muestra que $\mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec}(R)$.
Sea $I := \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 = (4, 2x, 2y, xy)$. Observe que $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = (2, xy)$. Tenemos un par de afirmaciones:

1. Para $2 \in \mathbb{Z} \subset R$ se tiene que $\mathscr{I}_2 = (2, x, y)$. La contención $(2, x, y) \subset \mathscr{I}_2$ es clara. Dado $f \in \mathscr{I}_2$ podemos suponer que $f = a + xg + yh$ para algunos $a \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{Z}[x, y], h \in \mathbb{Z}[y]$. Tenemos entonces que $2a + (2x)g + (2y)h = 2f \in I$ y así $2a + (2x)g + (2y)h = 4F_1 + 2xF_2 + 2yF_3 + xyF_4$. Dado que $\mathbb{Z}[x, y]$ es dominio entero se tiene que el término de grado cero de $2a + (2x)g + (2y)h$ es igual al término de grado cero de $4F_1$; es decir $2a = 4F_{1,0}$, donde $F_{1,0}$ es el término de grado cero de F_1. De la igualdad $2a = 4F_{1,0}$ se tiene $a = 2F_{1,0}$ y así $f = a + xg + yh = 2F_{1,0} + xg + yh \in (2, x, y)$. Esto muestra que $\mathscr{I}_2 = (2, x, y)$. Observe que $\mathscr{I}_2$ es ideal maximal de R pues $R/\mathscr{I}_2 \cong \mathbb{Z}_2$.

2. $\mathscr{I}_a = \mathscr{I}_2$ para todo $a \in \sqrt{I} \setminus I$. Sea $a \in \sqrt{I} \setminus I$ y note que $1 \notin \mathscr{I}_a$ pues en caso contrario se tendría que $a = 1 \cdot a \in I$ lo cual no es posible por la elección de a. Esto implica que $\mathscr{I}_a$ es ideal propio de R. Dado que $\mathscr{I}_2$ es ideal maximal de $R = \mathbb{Z}[x, y]$ e $\mathscr{I}_a$ es propio basta mostrar que $\mathscr{I}_2 \subset \mathscr{I}_a$ para tener la igualdad. Como $a \in \sqrt{I} = (2, xy)$ se tiene que $a = 2g + xyh$ para algunos $g, h \in R$. Ahora bien, si $f \in \mathscr{I}_2$ entonces $(2f)g + (xy)hf = af \in \mathscr{I}_2$ y como $2f, xy \in I$ se sigue que $af \in I$; es decir $f \in \mathscr{I}_a$, lo que muestra que $\mathscr{I}_2 \subset \mathscr{I}_a$.

Por el teorema 2.17 y ya que $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset I$, se tiene que I es ideal 2-absorbente de R.

Recordemos que un ideal I de un anillo R es ideal primo si y solo si para cada par de ideales I_1, I_2 de R tales que $I_1 I_2 \subset I$, se tiene que $I_1 \subset I$ o $I_2 \subset I$. Si suponemos ahora que I es un ideal de R tal que para cada terna de ideales I_1, I_2, I_3 de R con $I_1 I_2 I_3 \subset I$ se tiene que $I_1 I_2 \subset I$ o $I_1 I_2 \subset I$ o $I_2 I_3 \subset I$, nos gustaría saber si esto implica que I es un ideal 2-absorbente. Dados $a, b, c \in R$ tales que $abc \in I$, los ideales $I_1 = (a), I_2 = (b)$ e $I_3 = (c)$ son tales que $I_1 I_2 I_3 \subset I$, así que por hipótesis se tiene que $I_1 I_2 \subset I$ o $I_1 I_3 \subset I$ o $I_2 I_3 \subset I$, de donde $ab \in I$ o $ac \in I$ o $bc \in I$, por lo que I es 2-absorbente. El siguiente teorema muestra que la afirmación recíproca también es cierta. Antes de enunciar dicho teorema enunciaremos el siguiente lema técnico.

Lema 2.19. Sea I un ideal 2-absorbente no nulo de un anillo R y tal que $I \subsetneq \sqrt{I}$. Para ideales I_1, I_2, I_3 de R tales que $I_1 I_2 I_3 \subset I$ se tiene que $I_1 I_2 \subset I$ o $I_1 I_3 \subset I$ o $I_2 I_3 \subset I$.

Demostración. Supongamos primero que $\mathfrak{p} = \sqrt{I} \in \operatorname{Spec}(R)$. Tenemos que $I_1 I_2 I_3 \subset I \subsetneq \mathfrak{p}$ así que por el teorema 1.11 podemos suponer que $I_1 \subset \mathfrak{p}$. Observe que si $I_1 \subset I$ entonces terminaríamos pues en particular $I_1 I_2 \subset I$. Supongamos entonces que $I_1 \nsubseteq I$. En este caso vamos a demostrar que vale

la siguiente afirmación, a la cual nos referiremos como (*):
Para todo $x \in I_1 \setminus I$ se tiene que $I_2 \subset \mathscr{I}_x$ o bien $I_3 \subset \mathscr{I}_x$. Para probar esto sea $x \in I_1 \setminus I$. Se tiene que $x \in \mathfrak{p} \setminus I = \sqrt{I} \setminus I$ y por el corolario 2.18 $\mathscr{I}_x \in \operatorname{Spec}(R)$. Como $I_1I_2I_3 \subset I$ entonces $xI_2I_3 \subset I$, de donde $I_2I_3 \subset \mathscr{I}_x$ y por tanto $I_2 \subset \mathscr{I}_x$ o bien $I_3 \subset \mathscr{I}_x$. Esto concluye la prueba de la afirmación (*).
Supongamos ahora que $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, donde $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Min}_R(I)$ y $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$. Tenemos que $I_1I_2I_3 \subset I \subsetneq \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_1$. Por el teorema 1.11 podemos suponer que $I_1 \subset \mathfrak{p}_1$. Si $I_2 \subset \mathfrak{p}_2$ entonces $I_1I_2 \subset \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset I$ y de manera análoga se tiene que $I_1I_3 \subset I$ si $I_3 \subset \mathfrak{p}_2$. De esta manera podemos suponer que $I_2, I_3 \not\subseteq \mathfrak{p}_2$ y así $I_1I_2I_3 \subset I \subsetneq \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_2$ implica que $I_1 \subset \mathfrak{p}_2$, de donde $I_1 \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$. Si pasara que $I_1 \subset I$ entonces $I_1I_2 \subset I$ y terminamos. Supongamos así que $I_1 \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ e $I_1 \not\subseteq I$. Observe ahora que en este caso también vale la afirmación (*), pues si $x \in I_1 \setminus I$ entonces $x \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \sqrt{I} \setminus I$ y por el corolario 2.18 $\mathscr{I}_x \in \operatorname{Spec}(R)$. Nuevamente $I_1I_2I_3 \subset I$ implica que $xI_2I_3 \subset I$, de donde $I_2I_3 \subset \mathscr{I}_x$ y por tanto $I_2 \subset \mathscr{I}_x$ o bien $I_3 \subset \mathscr{I}_x$. De aquí en adelante supondremos entonces que $I_1 \subset \sqrt{I}$, $I_1 \not\subseteq I$ y que para todo $x \in I_1 \setminus I$ se cumple la afirmación (*). Continuando con la prueba de la proposición, tenemos de acuerdo a (*) los siguientes casos

1. $I_2, I_3 \subset \mathscr{I}_x$ para todo $x \in I_1 \setminus I$,
2. existe $a \in I_1 \setminus I$ tal que $I_2 \subset \mathscr{I}_a$ e $I_3 \not\subseteq \mathscr{I}_a$,
3. existe $a \in I_1 \setminus I$ tal que $I_2 \not\subseteq \mathscr{I}_a$ e $I_3 \subset \mathscr{I}_a$.

Caso 1. En este caso probaremos que $I_1I_2 \subset I$ (de hecho también vale $I_1I_3 \subset I$). Mostraremos que los generadores de I_1I_2 pertenecen a I, sean para esto $u \in I_1$ y $v \in I_2$, veremos que $uv \in I$. Si $u \in I$ terminamos. Supongamos entonces que $u \notin I$, se tiene así que $u \in I_1 \setminus I$ y por hipótesis $I_2 \subset \mathscr{I}_u$, como $v \in I_2$ se sigue que $v \in \mathscr{I}_u$ lo que concluye que $uv \in I$.
Caso 2. Sea $y \in I_1 \setminus I$ tal que $I_2 \subset \mathscr{I}_y$ e $I_3 \not\subseteq \mathscr{I}_y$. Vamos a mostrar primero que $I_2 \subset \mathscr{I}_x$ para todo $x \in I_1 \setminus I$. Sea $x \in I_1 \setminus I \subset \sqrt{I} \setminus I$. Del corolario 2.18 se sigue que $\mathscr{I}_y \subset \mathscr{I}_x$ o $\mathscr{I}_x \subset \mathscr{I}_y$. Como $I_2 \subset \mathscr{I}_y$ la afirmación es clara si $\mathscr{I}_y \subset \mathscr{I}_x$; supongamos entonces que $\mathscr{I}_x \subset \mathscr{I}_y$. Como $I_3 \not\subseteq \mathscr{I}_y$ no puede darse que $I_3 \subset \mathscr{I}_x$, así que por (*) se tiene que $I_2 \subset \mathscr{I}_x$. Esto concluye la prueba de la afirmación. Para terminar veamos que $I_1I_2 \subset I$. Sea $uv \in I_1I_2$ un generador. Veamos que $uv \in I$. Si $u \in I$ claramente $uv \in I$ y si $u \in I_1 \setminus I$ por la afirmación previa se tiene que $I_2 \subset \mathscr{I}_u$ de donde $v \in \mathscr{I}_u$ y así $uv \in I$.
Caso 3. Este caso es análogo al caso anterior y aquí se muestra que $I_1I_3 \subset I$. □

Teorema 2.20. Sea I un ideal propio no nulo de R. I es ideal 2-absorbente de R si y solo si cada que I_1, I_2, I_3 sean ideales de R tales que $I_1I_2I_3 \subset I$, se cumple $I_1I_2 \subset I$ o $I_1I_3 \subset I$ o $I_2I_3 \subset I$.

Demostración. El regreso ha sido probado en la discusión previa al lema anterior. Supongamos ahora que I es ideal 2-absorbente de R y que $I_1I_2I_3 \subset I$ para algunos ideales I_1, I_2, I_3 de R. Tenemos dos casos

1. $I = \sqrt{I}$,
2. $I \subsetneq \sqrt{I}$.

La idea de la prueba será en cada uno de estos casos considerar los subcasos cuando $\sqrt{I} = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ y $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, con $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Min}_R(I)$ y $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$.
Caso 1. $I = \sqrt{I}$.

a) $\sqrt{I} = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Tenemos $I_1I_2I_3 \subset I \subset \mathfrak{p}$ así que por el teorema 1.11 podemos suponer que $I_1 \subset \mathfrak{p} = \sqrt{I} = I$ de donde claramente $I_1I_2 \subset I$.

b) $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$. Aquí $I_1I_2I_3 \subset I \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_1$, nuevamente podemos suponer que $I_1 \subset \mathfrak{p}_1$. Análogamente $I_j \subset \mathfrak{p}_2$ para algún $j \in \{1, 2, 3\}$. Si $j = 1$ entonces $I_1 \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \sqrt{I} = I$ y así $I_1I_2 \subset I$. Si $j \neq 1$, digamos $j = 2$, entonces $I_2 \subset \mathfrak{p}_2$ y así $I_1I_2 \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \sqrt{I} = I$.

Caso 2. $I \subsetneq \sqrt{I}$. Este caso es justamente el lema anterior. □

El último teorema de este capítulo proporciona un criterio sencillo para decidir si un ideal primario es 2-absorbente.

Teorema 2.21. Sea I un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R. Se tiene que I es un ideal 2-absorbente si y solo si $\mathfrak{p}^2 \subset I$. En particular, $\mathfrak{m}^2$ es ideal 2-absorbente de R para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$.

Demostración. Si I es ideal 2-absorbente por el inciso 1 del teorema 2.12 se tiene que $\mathfrak{p}^2 \subset I$.
Recíprocamente, supongamos que $\mathfrak{p}^2 \subset I$ y que $abc \in I$ con $a, b, c \in R$. Si $a \notin \mathfrak{p}$ o $b \notin \mathfrak{p}$ o $c \notin \mathfrak{p}$, como I es $\mathfrak{p}$-primario, se tendría $bc \in I$ o $ac \in I$ o $ab \in I$ y terminamos. Supongamos entonces que $a, b, c \in \mathfrak{p}$. Dado que $\mathfrak{p}^2 \subset I$ se tiene que $ab \in I$.
Si $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ entonces $\mathfrak{m}^2$ es ideal $\mathfrak{m}$-primario de Ry por lo demostrado anteriormente se sigue que $\mathfrak{m}^2$ es ideal 2-absorbente de R. □

Corolario 2.22. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $\mathfrak{p} \neq 0$, entonces la potencia simbólica $\mathfrak{p}^{(2)} := \mathfrak{p}^2 R_{\mathfrak{p}} \cap R$ es ideal 2-absorbente de R.

Demostración. Es bien sabido que $\mathfrak{p}^{(2)}$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario de R, y como $\mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{p}^{(2)}$, por el teorema anterior se tiene que $\mathfrak{p}^{(2)}$ es ideal 2-absorbente de R. $\square$

Capítulo 3

Ideales n-absorbentes

En el capítulo anterior se estudiaron los ideales 2-absorbentes, los cuales son una generalización de los ideales primos. En este capítulo se trabajarán los ideales n-absorbentes, el concepto de la n-absorbencia fue definido de manera reciente en [2] por David F. Anderson y Ayman Badawi en el año 2010. Algunos resultados establecidos para los ideales n-absorbentes, con $n \geq 3$, son generalizaciones naturales de resultados establecidos para ideales 2-absorbentes, sin embargo, algunos ejemplos mostrarán que propiedades que tienen los ideales 2-absorbentes dejan de ser ciertas para ideales n-absorbentes.

Antes de comenzar con el estudio de los ideales n-absorbentes mencionaremos la notación y terminología que será utilizada de aquí en adelante. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathbb{N}_n$ al conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Si $a_1, \ldots, a_n$ son elementos de un anillo R (recuerde que anillo significa anillo conmutativo con elemento unitario) entonces $a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n := \prod\limits_{j \neq i} a_j$. Si $f : R \longrightarrow T$ es un morfismo de anillos entonces $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. La dimensión de un anillo es su dimensión de Krull y será denotada por $\dim(R)$.

Definición 3.1. Un ideal propio I de un anillo R se dice que es un ideal *n-absorbente* de R, $n \in \mathbb{N}$, si para todos $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$, $a_1 \cdots a_{n+1} \in I$ implica que $a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n \in I$ para algún $i \in \mathbb{N}_n$.

En la sección a continuación se mencionarán propiedades elementales de los ideales n-absorbentes.

3.1. Propiedades básicas de ideales n-absorbentes

Comenzamos con el siguiente lema.

Lema 3.2. Sean I un ideal n-absorbente de R y $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n$. Si $a_1, \ldots, a_m \in R$ son tales que $a_1 \cdots a_m \in I$ entonces $a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_m \in I$ para algún $i \in \mathbb{N}_m$.

Demostración. Tenemos que $a_1 \cdots a_n (a_{n+1} \cdots a_m) = a_1 \cdots a_m \in I$ y dado que I es n-absorbente se sigue que, o bien $a_1 \cdots a_n \in I$, o bien

$$a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_n (a_{n+1} \cdots a_m) \in I$$

para algún j. Si $a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_n (a_{n+1} \cdots a_m) \in I$ terminamos y si $a_1 \cdots a_n \in I$ entonces $a_1 \cdots a_n a_{n+1} \cdots a_{m-1} \in I$ y también terminamos. $\square$

Si I es un ideal n-absorbente de R y $a_1 \cdots a_m \in I$, donde $m \in \mathbb{N}$ es tal que $m > n$ y $a_1, \ldots, a_m \in R$, el lema anterior nos permite suponer siempre que $a_1 \cdots a_{m-1} \in I$.

Algunas propiedades elementales de los ideales n-absorbentes se mencionan a continuación.

Teorema 3.3. Sean I un ideal propio de R y $m, n \in \mathbb{N}$.

1. I es ideal n-absorbente de R si y solo si para cualesquiera $a_1, \ldots, a_m \in R$, con $m > n$, tales que $a_1 \cdots a_m \in I$, existen $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}_m$ tales que $a_{i_1} \cdots a_{i_n} \in I$.

2. Si I es ideal n-absorbente de R entonces I es ideal m-absorbente de R para todo $m \geq n$.

3. Supongamos que I_j es un ideal n_j-absorbente de R para cada $j = 1, \ldots, m$. Si $I = I_1 \cap \cdots \cap I_m$ y $n = n_1 + \cdots + n_m$ entonces I es ideal n-absorbente de R.

4. Si R es dominio entero y $p_1, \ldots, p_n \in R$ son elementos primos entonces el ideal principal $I = (p_1 \cdots p_n)$ es un ideal n-absorbente de R.

5. Si I es ideal n-absorbente de R entonces $x^n \in I$ para todo $x \in \sqrt{I}$ y $\sqrt{I}$ es ideal n-absorbente.

Demostración.

1. El regreso es claro tomando $m = n+1$. Supongamos que $a_1 \cdots a_m \in I$, con $a_1, \ldots, a_m \in R$. Por el lema 3.2 se tiene que $a_1 \cdots a_{m-1} \in I$. Si $m - 1 = n$ terminamos y si $m - 1 > n$, aplicando nuevamente el lema 3.2, se tiene que $a_1 \cdots a_{m-2} \in I$. Si $m-2 = n$ terminamos y si $m-2 > n$ por el mismo lema $a_1 \cdots a_{m-3} \in I$. Aplicando este procedimiento un número finito de veces se tiene que $a_1 \cdots a_n \in I$ y se termina la prueba.

2. Supongamos que I es ideal n-absorbente. Si $m \in \mathbb{N}$ es tal que $m > n$ y $a_1 \cdots a_{m+1} \in I$, con $a_1, \ldots, a_{m+1} \in R$, por el lema 3.2 se tiene que $a_1 \cdots a_m \in I$ por lo que I es ideal m-absorbente.

3. Sean $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$ tales que $a_1 \cdots a_{n+1} \in I$. Se tiene entonces que $a_1 \cdots a_{n+1} \in I_j$ para toda $j = 1, \ldots, m$ y dado que I_j es n_j-absorbente existen $j_1, \ldots, j_{n_j} \in \mathbb{N}_{n+1}$ tales que $a_{j_1} \cdots a_{j_{n_j}} \in I_j$. Para cada $j = 1, \ldots, m$, definimos $A_j = \left\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n_j}}\right\}$ y $A = \bigcup\limits_{j=1}^{m} A_j$. Obsérvese que $|A_j| \leq n_j$ y $|A| \leq n$. Si consideramos ahora $\prod\limits_{a \in A} a$, se tiene que $\prod\limits_{a \in A} a \in I$. Si $|A| = n$ no hay nada que hacer y si $|A| < n$, podemos completar el producto hasta conseguir n factores y terminamos.

4. Sean $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$ tales que $a_1 \cdots a_{n+1} \in I$. Como $I \subset (p_j)$ para todo $j = 1, \ldots, n$, existe $i_j \in \mathbb{N}_{n+1}$ tal que $a_{i_j} \in (p_j)$, de donde $a_{i_1} \cdots a_{i_n} \in (p_1 \cdots p_n)$.

5. Sea $a \in \sqrt{I}$. Mostraremos que $a^n \in I$. Tenemos que $a^m \in I$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Si $m \leq n$ entonces $n = m + l$ para algún $l \geq 0$, así que $a^n = a^l a^m \in I$. Por otro lado, si $m > n$ por 1 de este teorema se sigue que $a^n \in I$. Veamos ahora que $\sqrt{I}$ es ideal n-absorbente, para ello, sean $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$ tales que $a_1 \cdots a_{n+1} \in I$. Se tiene entonces que

$$a_1^n \cdots a_{n+1}^n = (a_1 \cdots a_{n+1})^n \in I.$$

Dado que I es ideal n-absorbente podemos suponer que

$$(a_1 \cdots a_n)^n = a_1^n \cdots a_n^n \in I$$

y por tanto $a_1 \cdots a_n \in \sqrt{I}$.

□

Observación 4. De la demostración del teorema anterior y debido a que, en general, cualquier ideal absorbe productos por elementos del anillo, es suficiente mostrar que el producto de cualesquiera m de los $n+1$ elementos pertenece a I para concluir que es ideal n-absorbente, donde $m \leq n$.

Si I es un ideal m-absorbente de un anillo R, para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces el siguiente conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : \ I \text{ es ideal } n\text{-absorbente de } R\}$$

es no vacío, por lo que tiene un elemento mínimo, tal elemento mínimo se denotará por $\omega_R(I)$. Para que $\omega_R(I)$ esté definido para cualquier ideal I de R conviene extender la definición mediante

$$\omega_R(I) = \begin{cases} \infty & \text{si } I \text{ no es } n\text{-absorbente para todo } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{si } I = R. \end{cases}$$

Cuando no haya confusión, se escribirá $\omega(I)$ en lugar de $\omega_R(I)$. Si (a) es un ideal principal del anillo R escribiremos $\omega(a)$ en lugar de $\omega((a))$.
Las siguientes afirmaciones son claras

1. $\omega(I) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ para cualquier ideal I de R.
2. $\omega(I) = 1$ si y solo si $I \in \operatorname{Spec}(R)$.
3. $\omega(I) = 0$ si y solo si $I = R$.

Del teorema 3.3 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.4. Sea R un anillo.

1. Si I_j es un ideal n_j-absorbente de R para cada $j = 1, \ldots, m$ entonces $\omega\left(I_1 \cap \cdots \cap I_m\right) \leq \omega\left(I_1\right) + \cdots + \omega\left(I_m\right)$. De manera particular, si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(R)$ entonces
$$\omega\left(\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n\right) \leq \omega\left(\mathfrak{p}_1\right) + \cdots + \omega\left(\mathfrak{p}_n\right) = n. \tag{3.1}$$
2. Si R es dominio entero y $p_1, \ldots, p_n \in R$ son elementos primos entonces
$$\omega\left(p_1 \cdots p_n\right) \leq n.$$
3. Si I es ideal n-absorbente de R entonces $\omega\left(\sqrt{I}\right) \leq \omega(I)$.

Observación 5. Respecto al inciso 2 del corolario anterior, nótese que $(p_1 \cdots p_n)$ no es ideal $(n-1)$-absorbente de R pues $p_1 \cdots\ p_n \in (p_1 \cdots\ p_n)$ pero para cualquier $j \in \mathbb{N}_n$ se tiene que $p_1 \cdots \widehat{p_j} \cdots p_n \notin (p_1 \cdots\ p_n)$, pues de lo contrario p_j sería unidad. Con esto $\omega_R\left(p_1 \cdots p_n\right) = n$.

Cabe mencionar ahora que la desigualdad (3.1) puede ser estricta: Si R es un dominio entero y $p \in R$ es elemento primo entonces $0, (p) \in \operatorname{Spec}(R)$, así que $\omega(0) = 1 = \omega(p)$ y

$$\omega(0 \cap (p)) = \omega(0) = 1 < 2 = \omega(0) + \omega(p).$$

El siguiente lema muestra que cuando los ideales primos son incomparables (es decir, incomparables bajo contención) entonces se da la igualdad.

Lema 3.5. Sean $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(R)$ incomparables. Se tiene entonces que $\omega(\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n) = n$.

Demostración. La desigualdad $\omega(\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n) \leq n$ ya se tiene por el inciso 1 del corolario 3.4. Sólo hace falta ver que $\omega(\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n) \geq n$. En efecto, por el teorema de evasión de primos se tiene que $\mathfrak{p}_i \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ para todo $i = 1, \dots, n$, por lo que existe $a_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$. Observe ahora que $a_1 \cdots a_n \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, pero $a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_n \notin \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ pues $a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_n \notin \mathfrak{p}_j$. Esto muestra que $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ no es $(n-1)$-absorbente y por tanto $\omega(\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n) \geq n$. $\square$

Es posible enunciar también 4 del teorema 3.3 de manera más general: Si R es un dominio entero y $a_1, \dots, a_n \in R$ son elementos no nulos ni unidades entonces $\omega(a_1 \cdots a_n) \geq n$, de donde $\omega(a_1 \cdots a_n) = n$.

Daremos a continuación un ejemplo de un anillo que tiene un ideal n-absorbente para cada $n \in \mathbb{N}$ y que también posee ideales que no son n-absorbentes para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2. Sean $R = \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ e $I = \{(x_i) \in R : x_{2i-1} = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $I_n = \{(x_i) \in R : x_i = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$. Se tiene que $\omega(I_n) = n$ y $\omega(I) = \infty$.

Demostración. Es claro que I_n e I son ideales propios de R.

a) Sea $n \in \mathbb{N}$. Veamos que I_n es ideal n-absorbente. Para $a \in R$, $(a)_i$ denotará la i-ésima coordenada de a. Si $a_1, \dots, a_{n+1} \in R$ son tales que $a_1 \cdots a_{n+1} \in I_n$ entonces

$$(a_1)_i \cdots (a_{n+1})_i = (a_1 \cdots a_{n+1})_i = 0$$

para todo $i \in \mathbb{N}_n$. Como $\mathbb{Z}_2$ es dominio entero, para cada $i = 1, \dots, n$ existe $j(i) \in \mathbb{N}_{n+1}$ tal que $\left(a_{j(i)}\right)_i = 0$. De esta manera $a_{j(1)} \cdots a_{j(n)} \in I$, lo que muestra que I_n es ideal n-absorbente y por tanto $\omega(I_n) \leq n$. Mostraremos que I_n no es $(n-1)$-absorbente.
Para cada $j \leq n$, sea $a_j \in R$ tal que

$$(a_j)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Nótese que $a_1 \cdots a_n \in I_n$ pero $a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_n \notin I_n$ pues $(a_1 \cdots a_n)_j = 1 \neq 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Esto muestra que I_n no es $(n-1)$-absorbente y por tanto $\omega(I_n) = n$.

b) Supongamos que I es m-absorbente para algún $m \in \mathbb{N}$. Para cada $j = 1, \ldots, m+1$, sea $a_j \in R$ dado por

$$(a_j)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i > 2m+1 \text{ o } i = 2j-1, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que $a_1 \cdots a_{m+1} \in I$ pero $a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_{m+1} \notin I$ pues

$$(a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_{m+1})_{2_{j-1}} = 1.$$

Se sigue que $\omega(I) = \infty$.

Observe además que si para algún $m \in \mathbb{N}$ el ideal 0 fuese m-absorbente entonces los elementos $a_1, \ldots, a_{m+1} \in R$ definidos mediante

$$(a_j)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j \text{ o } i \geq n+1, \end{cases}$$

son tales que $a_1 \cdots a_{m+1} \in 0$ pero $a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_{m+1} \notin 0$ pues, si $l \in \mathbb{N}_{m+1}$ entonces $(a_1 \cdots \widehat{a_l} \cdots a_{m+1})_l = 1$. Con esto $\omega(0) = \infty$. □

Antes de continuar enunciando más propiedades de los ideales n-absorbentes, recordaremos a los anillos de Boole: Se dice que un anillo R es de *Boole* si para cada $a \in R$ se tiene que $a^2 = a$. Mencionaremos a continuación algunas propiedades de estos anillos, algunas de las cuales serán utilizadas en un ejemplo posterior.

Proposición 3.6. Si R es un anillo de Boole entonces

1. $2a = 0$ para todo $a \in R$.
2. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ entonces $\mathfrak{p}$ es maximal.
3. Si I es un ideal finitamente generado de R entonces I es principal.

Demostración.

1. Sea $a \in R$. Como R es de Boole, para $1 + a \in R$ se tiene que

$$1 + a = (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 = (1 + a^2) + 2a = (1+a) + 2a$$

y por tanto $2a = 0$.

2. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Dado que R es de Boole, para todo $x \in R$ se tiene que $x(x-1) = x^2 - x = 0 \in \mathfrak{p}$, así que $x \in \mathfrak{p}$ o bien, $x - 1 \in \mathfrak{p}$, así que el dominio entero $R/\mathfrak{p}$ tiene sólo dos elementos: $[0]$ y $[1]$ con $1 \neq 0$, por lo que $R/\mathfrak{p}$ es campo y entonces $\mathfrak{p}$ es ideal maximal de R.

3. Sea $I = (a_1, \ldots, a_n)$ un ideal finitamente generado de R. Mostraremos la afirmación por inducción sobre el número de generadores de I. Si $n = 1$ no hay nada que hacer, supongamos entonces que $n \geq 2$. Si $I = (a_1, a_2)$ observe que $b = a_1 + a_2 + a_1a_2 \in R$ es tal que $b \in I$, además

$$a_1b = a_1^2 + a_1a_2 + a_1^2a_2 = a_1 + a_1a_2 + a_1a_2 = a_1 + 2a_1a_2 = a_1$$

y de manera análoga se tiene que $a_2 = a_2b$, por lo que $a_1, a_2 \in (b)$, de donde $I = (a_1, a_2) \subset (b) \subset I$. Se sigue que $I = (b)$, es decir, I es principal. Supongamos ahora que $J = (a_1, \ldots, a_{n-1}) = (d)$ para algún $d \in R$. Dado que $I = J + (a_n)$, por hipótesis de inducción se tiene que $I = (a_n, d)$ y, aplicando la base de inducción se sigue que $I = (a_n + d + a_nd)$, de donde I es principal.

□

Observación 6. Dado que en un anillo de Boole todo ideal primo es maximal, se tiene que la dimesión de Krull de un anillo de Boole es 0.

En el ejemplo 2 y dado que en $\mathbb{Z}_2$ se tiene que $\overline{a}^2 = \overline{a}$, es claro que para todo $x \in R$, $x^2 = x$ y por tanto R es de Boole.

Los teoremas 3.7 y 3.8 son generalizaciones de hechos bien conocidos acerca de ideales primos y primarios.

Teorema 3.7. Si I es un ideal n-absorbente de R y $S \subset R$ es un sistema multiplicativo tal que $I \cap S = \emptyset$ entonces $S^{-1}I$ es un ideal n-absorbente de $S^{-1}R$ y además $\omega_{S^{-1}R}\left(S^{-1}I\right) \leq \omega_R(I)$.

Demostración. Notemos primero que, como $I \cap S = \emptyset$, entonces $S^{-1}I$ es ideal propio de $S^{-1}R$. Ahora, sean $\frac{a_1}{s_1}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} \in S^{-1}R$ tales que $\frac{a_1 \cdots a_{n+1}}{s_1 \cdots s_{n+1}} = \frac{a_1}{s_1} \cdots \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} \in S^{-1}I$. Existe entonces $u \in S$ tal que

$$(ua_1)\, a_2 \cdots a_{n+1} = u\left(a_1 \cdots a_{n+1}\right) \in I.$$

Como I es n-absorbente se tienen, sin pérdida de generalidad, dos casos: que $(ua_1)\, a_2 \cdots a_n \in I$ o bien $a_2 \cdots a_{n+1} \in I$. Si $(ua_1)\, a_2 \cdots a_n \in I$ entonces

$$\frac{a_1 \cdots a_n}{s_1 \cdots s_n} = \frac{a_1}{s_1} \cdots \frac{a_n}{s_n} = \frac{ua_1}{us_1} \cdots \frac{a_n}{s_n} \in S^{-1}I$$

y si $a_2 \cdots a_{n+1} \in I$ entonces $\dfrac{a_2}{s_2} \cdots \dfrac{a_{n+1}}{s_{n+1}} = \dfrac{a_2 \cdots a_{n+1}}{s_2 \cdots s_{n+1}} \in S^{-1}I$. En cualquier caso se obtiene que $S^{-1}I$ es ideal n-absorbente de $S^{-1}R$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la desigualdad del teorema anterior puede ser estricta.

Ejemplo 3. Sean $R = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$, I e I_n como en el ejemplo 2. Dado que I e I_n son ideales propios de R, por el teorema de Krull existen ideales maximales $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_n$ de R tales que $I \subset \mathfrak{m}$ e $I_n \subset \mathfrak{m}_n$. Se tienen las siguientes afirmaciones:

1. $(I_n)_{\mathfrak{m}_n} \in \operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{m}_n})$, de donde $\omega_{R_{\mathfrak{m}_n}}\left((I_n)_{\mathfrak{m}_n}\right) = 1$.
2. $I_{\mathfrak{m}} \in \operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{m}})$, por tanto $\omega_{R_{\mathfrak{m}}}(I_{\mathfrak{m}}) = 1$.
3. Si J es el ideal trivial entonces $J_{\mathfrak{m}} \in \operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{m}})$ para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(R)$.

Demostración. Mostrar que $(I_n)_{\mathfrak{m}_n} \in \operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{m}_n})$, $I_{\mathfrak{m}} \in \operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{m}})$ y que, para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(R)$, $J_{\mathfrak{m}} \in \operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{m}})$ son todos análogos, por lo que sólo mostraremos que $I_{\mathfrak{m}} \in \operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{m}})$. Sean $\dfrac{a}{s}, \dfrac{b}{t} \in R_{\mathfrak{m}}$ tales que $\dfrac{ab}{st} = \dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{b}{t} \in I_{\mathfrak{m}}$. Existe entonces $u \in R\backslash\mathfrak{m}$ tal que $uab \in I$. Para $ua \in R$ tenemos dos posibles casos: $ua \in \mathfrak{m}$ o $ua \notin \mathfrak{m}$. Si $ua \in \mathfrak{m}$, como $u \notin \mathfrak{m}$, entonces $w = u + ua \notin \mathfrak{m}$ y es tal que $wa = ua + ua^2 = ua + ua = 0 \in I$, de donde $\dfrac{a}{s} \in I_{\mathfrak{m}}$. Si $ua \notin \mathfrak{m}$ es inmediato que $\dfrac{b}{t} \in I_{\mathfrak{m}}$. Se sigue que $\omega_{R_{\mathfrak{m}}}(I_{\mathfrak{m}}) = 1$.
En el ejemplo 2 se mostró que $\omega_R(I_n) = n$, $\omega_R(I) = \infty$ y $\omega_R(J) = \infty$, por tanto $\omega_{R_{\mathfrak{m}_n}}\left((I_n)_{m_n}\right) < \omega_R(I_n)$, $\omega_{R_{\mathfrak{m}}}(I_{\mathfrak{m}}) < \omega_R(I)$ y $\omega_{R_{\mathfrak{m}}} < \omega_R(J)$. $\square$

Teorema 3.8. Sea $f : R \longrightarrow T$ un morfismo de anillos.

1. Si J es un ideal n-absorbente de T entonces $f^{-1}(J)$ es ideal n-absorbente de R, además $\omega_R\left(f^{-1}(J)\right) \leq \omega_T(J)$.
2. Si f es suprayectivo e I es un ideal de R tal que $\ker f \subset I$ entonces se tiene que $f(I)$ es ideal n-absorbente de T si y solo si I es ideal n-absorbente de R, además $\omega_T(f(I)) = \omega_R(I)$. Esto se cumple, en particular, si f es un isomorfismo.

Demostración.

1. Si $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$ son tales que $a_1 \cdots a_{n+1} \in f^{-1}(J)$ entonces

$$f(a_1) \cdots f(a_{n+1}) = f(a_1 \cdots a_{n+1}) \in J.$$

Como J es n-absorbente se tiene que

$$f(a_1 \cdots a_n) = f(a_1) \cdots f(a_n) \in J,$$

de donde $a_1 \cdots a_n \in f^{-1}(J)$ y por tanto $f^{-1}(J)$ es ideal n-absorbente de R. Es claro que $\omega_R\left(f^{-1}(J)\right) \leq \omega_T(J)$.

2. Supongamos que $f(I)$ es ideal n-absorbente de T y que $a_1 \cdots a_{n+1} \in I$, donde $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$. Se tiene entonces que

$$f(a_1) \cdots f(a_{n+1}) = f(a_1 \cdots a_{n+1}) \in f(I)$$

y como $f(I)$ es n-absorbente $f(a_1 \cdots a_n) = f(a_1) \cdots f(a_n) \in f(I)$. Existe entonces $x \in I$ tal que $f(a_1 \cdots a_n) = f(x)$, así $a_1 \cdots a_n - x \in \ker f \subset I$ y como $x \in I$ se sigue que $a_1 \cdots a_n \in I$, de donde I es n-absorbente.
Recíprocamente, sean $b_1, \ldots, b_{n+1} \in T$ tales que $b_1 \cdots b_{n+1} \in f(I)$. Como f es suprayectivo, para cada $j \in \mathbb{N}_{n+1}$ se tiene $b_j = f(a_j)$, donde $a_j \in R$. De esta manera

$$f(a_1 \cdots a_{n+1}) = b_1 \cdots b_{n+1} \in f(I).$$

Como antes, esto implica que $a_1 \cdots a_{n+1} - x \in \ker f \subset I$ para algún $x \in I$ y por tanto $a_1 \cdots a_{n+1} \in I$. Ya que I es n-absorbente, se tiene que $a_1 \cdots a_n \in I$, luego

$$b_1 \cdots b_n = f(a_1 \cdots a_n) \in f(I)$$

y terminamos. Es claro que $\omega_T(f(I)) = \omega_R(I)$.

□

El siguiente corolario es consecuencia inmediata del teorema anterior considerando los morfismos inclusión $R \hookrightarrow T$ y proyección $R \longrightarrow R/I$ respectivamente.

Corolario 3.9.

1. Sean $R \subset T$ una extensión de anillos y J un ideal n-absorbente de T. Se tiene que $J \cap R$ es un ideal n-absorbente de R y además $\omega_R(J \cap R) \leq \omega_T(J)$.

2. Sean $I \subset J$ ideales de un anillo R. Se tiene que J es un ideal n-absorbente de R si y solo si J/I es un ideal n-absorbente de R/I. Además $\omega_{R/I}(J/I) = \omega_R(J)$.

Ejemplo 4. Mostraremos que la desigualdad en el inciso 1 del teorema 3.8 (y por tanto la de 1 del corolario 3.9) puede ser estricta y que la hipótesis $\ker f \subset I$ en el inciso 2 del teorema 3.8 es necesaria.

1. Sean $R = \mathbb{Q}[x] \subset T = \mathbb{Q}[x, y]$ y $J = (x, y^2)\, T$. Se tiene que $\omega_T(J) = 2$
2. Sean $R = \mathbb{Q}\,[x, y]$, $T = \mathbb{Q}[x]$ y $f : R \longrightarrow T$ dada por $p(x, y) \mapsto p(x, 0)$. Si $I_1 = (x^2 + y)\, R$ e $I_2 = (x, y^2)\, R$ entonces
   a) $\omega_R\,(I_1) = 1$ y $\omega_T\,(f\,(I_1)) = 2$ y por tanto $\omega_R\,(I_1) < \omega_T\,(f\,(I_1))$.
   b) $\omega_R\,(I_2) = 2$ y $\omega_T\,(f\,(I_2)) = 1$, por tanto $\omega_R\,(I_2) > \omega_T\,(f\,(I_2))$.

Demostración.

1. Veamos primero que J es 2-absorbente. Si $\mathfrak{m} = (x, y)T$ entonces $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(T)$. Ahora, $\mathfrak{m}^2 = (x^2, xy, y^2) \subset J = (x, y^2) \subset (x, y) = \mathfrak{m}$, de donde $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}^2} \subset \sqrt{J} \subset \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$, es decir $\sqrt{J} = \mathfrak{m}$, por lo que J es $\mathfrak{m}$-primario, y como $\mathfrak{m}^2 \subset J$, por el teorema 2.21 se sigue que J es ideal 2-absorbente de T. Es claro además que $J \notin \mathrm{Spec}(T)$, por lo que $\omega_T(J) = 2$.
   Nótese ahora que $J \cap R = xR$. Dado que $x \in R$ es irreducible, es primo, así que $xR \in \mathrm{Spec}(R)$ y así $\omega_R(J \cap R) = 1$. Se tiene así que $\omega_R(J \cap R) < \omega_T(J)$.
2. Observe primero que f es epimorfismo de anillos y $\ker f = yR$, así que $\ker f \not\subseteq I_1$ y $\ker f \not\subseteq I_2$.
   a) Dado que $x^2 + y \in R$ es lineal en y es irreducible y por tanto primo, de donde $I_1 = (x^2 + y) \in \mathrm{Spec}(R)$, por lo que $\omega_R\,(I_1) = 1$. Por otro lado, $f\,(I_1) = x^2T$. Observe que $f\,(I_1) \notin \mathrm{Spec}(T)$, pues $x^2 \in f\,(I_1)$ pero $x \notin f\,(I_1)$. Si $\mathfrak{q} = xT$ entonces $\mathfrak{q} \in \mathrm{Max}(T)$, $\sqrt{f\,(I_1)} = \mathfrak{q}$, y como claramente $\mathfrak{q}^2 \subset f\,(I_1)$ se tiene, por el teorema 2.21, que $f\,(I_1)$ es ideal 2-absorbente de T. Se sigue así que $\omega_T\,(f\,(I_1)) = 2$ y por tanto $\omega_R\,(I_1) < \omega_T\,(f\,(I_1))$.
   b) Si $I_2 = (x, y^2)\, R$ entonces $f\,(I_2) = xT \in \mathrm{Spec}(T)$, por lo que $\omega_T\,(f\,(I_2)) = 1$. Ya se ha mostrado anteriormente que $\omega_R\,(I_2) = 2$, de donde $\omega_R\,(I_2) > \omega_T\,(f\,(I_2))$.

$\square$

Como en el caso de los ideales 2-absorbentes, una de las principales propiedades de los ideales n-absorbentes hace referencia a la cantidad de ideales primos que son minimales sobre ellos.

Teorema 3.10. Si I es un ideal n-absorbente de R entonces $|\mathrm{Min}_R(I)| \leq n$.

Demostración. Si $n = 1$ entonces $I \in \mathrm{Spec}(R)$ y por tanto el único primo minimal sobre I es I. Supongamos entonces que $n \geq 2$ y que $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{n+1} \in \mathrm{Min}_R(I)$ son distintos. Como estos ideales son incomparables, en particular, para cada $i = 1, \ldots, n$ existe $a_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \left(\left(\bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j \right) \cup \mathfrak{p}_{n+1} \right)$ y por el lema 2.8 existen $b_i \in R \setminus \mathfrak{p}_i$ y $n_i \in \mathbb{N}$ tales que $b_i a_i^{n_i} \in I$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Como sólo hay un número finito de n_i, podemos suponer que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_i a_i^m \in I$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Observe ahora que, como $I \subset \mathfrak{p}_{n+1}$, entonces $a_i^l \notin I$ para cualquier entero no negativo l. Tenemos dos posibles casos para $m \in \mathbb{N}$: $m \leq n$ o $m > n$.

1. Si $m \leq n$ entonces $b_i a_i^n \in I$. Como I es n-absorbente y $a_i^n \notin I$, se tiene que $b_i a_i^{n-1} \in I$.

2. Si $n < m$, por el inciso 1 del teorema 3.3, se tiene que $b_i a_i^{n-1} \in I$ o bien $a_i^n \in I$, pero $a_i^n \notin I$, así que $b_i a_i^{n-1} \in I$

En cualquier caso se tiene que $b_i a_i^{n-1} \in I$, de donde

$$b_i a_1^{n-1} \cdots a_i^{n-1} \cdots a_n^{n-1} \in I,$$

esto para cada $i = 1, \ldots, n$, y por tanto

$$(b_1 + \cdots + b_n)\, a_1^{n-1} \cdots a_n^{n-1} \in I. \tag{3.2}$$

Ahora bien, dado $i \in \mathbb{N}_n$, se tiene que, para todo $j \neq i$, $b_i a_i^{n-1} \in I \subset \mathfrak{p}_j$, pero $a_i \notin \mathfrak{p}_j$, así que $b_i \in \mathfrak{p}_j$ y por tanto $b_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{p}_j \setminus \mathfrak{p}_i$. Si pasara que $b_1 + \cdots + b_i + \cdots b_n \in \mathfrak{p}_i$, se tendría que $b_i \in \mathfrak{p}_i$, lo cual contradice la elección de b_i. Se sigue que $b_1 + \cdots + b_n \notin \mathfrak{p}_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como además $a_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \left(\left(\bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j \right) \cup \mathfrak{p}_{n+1} \right)$, se tiene también que $a_1^{n-1} \cdots \widehat{a_i^{n-1}} \cdots a_n^{n-1} \notin \mathfrak{p}_i$, de donde $(b_1 + \cdots + b_n)\, a_1^{n-1} \cdots \widehat{a_i^{n-1}} \cdots a_n^{n-1} \notin \mathfrak{p}_i$ y por tanto

$$(b_1 + \cdots + b_n)\, a_1^{n-1} \cdots \widehat{a_i^{n-1}} \cdots a_n^{n-1} \notin I$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Al ser I n-absorbente, (3.2) implica

$$(b_1 + \cdots + b_n)\, a_1^{n-1} \cdots \widehat{a_i^{n-1}} \cdots a_n^{n-1} \in I$$

para algún $i \in \mathbb{N}_n$ o bien $a_1^{n-1} \cdots a_n^{n-1} \in I$. Por el argumento previo se sigue que $a_1^{n-1} \cdots a_n^{n-1} \in I \subset \mathfrak{p}_{n+1}$, de donde $a_i \in \mathfrak{p}_{n+1}$ para algún $i \neq n+1$, lo cual es una contradicción. Se sigue que $|\mathrm{Min}_R(I)| \leq n$.
Observe además que $|\mathrm{Min}_R(I)| \leq \omega_R(I)$. □

El teorema anterior también puede interpretarse geométricamente como sigue.

Teorema 3.11. Si I es un ideal n-absorbente de R entonces $\mathrm{Spec}\,(R/I)$ tiene a lo más n componentes irreducibles.

Es importante mencionar que la cantidad de ideales primos que sean minimales sobre un ideal n-absorbente I puede ser estrictamente menor que n, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Sean $R = \mathbb{Z}$ e $I_1 = (27), I_2 = (18), I_3 = (30)$ ideales de R. Se tiene que $\omega\,(I_j) = 3$ y $|\mathrm{Min}_R\,(I_j)| = j$.

Demostración. Sólo mostraremos que $\omega\,(I_2) = 3$ y que $|\mathrm{Min}_R\,(I_2)| = 2$, pues los demas casos son análogos. Note que $I_2 = (2 \cdot 3 \cdot 3)$, así que por la observación 5 se tiene que $\omega\,(I_2) = 3$. Por otro lado, si $\mathfrak{p}_1 = (2)$ y $\mathfrak{p}_2 = (3)$ entonces $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Spec}(R)$ son tales que $I_2 \subsetneq \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$. Si existiera $\mathfrak{q}_1 \in \mathrm{Spec}(R)$ tal que $I_2 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{p}_1$, como $\mathfrak{q}_1$ es maximal pues R es DIP e $I_2 \neq 0$, se tendría que $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1$. De manera análoga se tiene que, si $\mathfrak{q}_2 \in \mathrm{Spec}(R)$ es tal que $I_2 \subset \mathfrak{q}_2 \subset \mathfrak{p}_2$ entonces $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{p}_2$. El trabajo previo muestra que $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Min}_R\,(I_2)$. Veamos ahora que de hecho $\mathrm{Min}_R\,(I_2) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$. Una contención ya se tiene, para la otra, sea $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}_R\,(I_2)$ y supongamos que $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}_2$. Como $0 \neq I_2 \subset \mathfrak{q}$ se tiene que $\mathfrak{q}$ es ideal maximal, así que $\mathfrak{q} \nsubseteq \mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{q} \nsubseteq \mathfrak{p}_2$ y por el teorema de evasión de primos $\mathfrak{q} \nsubseteq (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2)$. Sea $a \in \mathfrak{q}$ tal que $a \notin \mathfrak{p}_1 = (2)$ y $a \notin \mathfrak{p}_2 = (3)$. Por el lema 2.8 existe $b \in \mathbb{Z} \setminus \mathfrak{q}$ así como $n \in \mathbb{N}$ tales que $ba^n \in I = (2 \cdot 3^2)$. Dado que $I_2 \subset (2)$ entonces $2|ba^n$ y como $2 \nmid a$ se tiene que $2|b$, es decir, $b \in (2)$. Tenemos también que $3^2|ba^n$ y $3 \nmid a^n$, por lo que $3^2|b$ y así $b \in (3^2)$. Con esto $b \in (2) \cap (3^2) = (2 \cdot 3^2)$, la última igualdad por el corolario 1.22. Esto implica que $b \in I$ y por tanto $b \in \mathfrak{q}$, que es una contradicción. Se sigue que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1$ o $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_2$.
De manera análoga se tiene que el único ideal primo de R que es minimal sobre I_1 es (3), y los tres ideales primos de R que son minimales sobre I_3 son $(2), (3)$ y (5). □

Si R es un DIP, $p_1, \ldots, p_m \in R$ son elementos primos, $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ e $I = (p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m})$ y además $n = n_1 + \cdots + n_m$ entonces $\omega(I) = n$ por la observación 5. Definiendo ahora $\mathfrak{p}_j := (p_j)$, $j = 1, \ldots, m$, podemos usar argumentos análogos a los usados en el ejemplo anterior para mostrar que $\mathrm{Min}_R(I) = \{(p_1), \ldots, (p_m)\}$. Enunciamos estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 3.12. Sean R un DIP, $p_1, \ldots, p_m \in R$ elementos primos distintos, $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ y $n = n_1 + \cdots + n_m$. Si $I = (p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m})$ entonces $\omega_R(I) = n$ y $\mathrm{Min}_R(I) = \{(p_1), \ldots, (p_m)\}$.

Ya se ha visto que la intersección de n ideales primos es un ideal n-absorbente. Investigaremos ahora cuando el producto de n ideales primos es un ideal n-absorbente. El siguiente teorema es un caso trivial en el que el producto de n ideales primos de un anillo es n-absorbente.

Teorema 3.13. Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(R)$ tales que $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = (1)$ para todos $i \neq j$. Se tiene entonces que $I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ es ideal n-absorbente de R. Además $\omega(I) = n$.

Demostración. Como $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = (1)$ entonces $I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$ y por el lema 3.5, se concluye $\omega(I) = n$. $\square$

En general, el producto de n ideales primos, con $n \geq 2$, no es n-absorbente, como se muestra a continuación.

Ejemplo 6.

1. Sea $R = \mathbb{Z}[x,y] + 6z\mathbb{Z}[x,y,z] \subset \mathbb{Z}[x,y,z]$ y sean $\mathfrak{p}_1 = x\mathbb{Z}[x,y] + 6z\mathbb{Z}[x,y,z]$, $\mathfrak{p}_2 = y\mathbb{Z}[x,y] + 6z\mathbb{Z}[x,y,z]$. Se tiene que
   a) $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Spec}(R)$ y son incomparables.
   b) $I = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ no es ideal 2-absorbente de R.
   c) $\mathfrak{p}_1^2, \mathfrak{p}_2^2$ no son ideales 2-absorbentes de R.
2. Sea $R = \mathbb{Z}[x,y,z]$. Se tiene que
   a) $\mathfrak{p}_1 = (2,x), \mathfrak{p}_2 = (2,y), \mathfrak{p}_3 = (2,z) \in \mathrm{Spec}(R)$ son incomparables.
   b) $I = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 = (8, 4x, 4y, 4z, 2xy, 2xz, 2yz, xyz)$ no es ideal 3-absorbente de R.

Demostración.

1. a) Para ver que $\mathfrak{p}_1 \in \mathrm{Spec}(R)$, definimos $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{Z}[y]$ mediante $f(x,y) + 6zh(x,y,z) \mapsto f(0,y)$. Es claro que φ es epimorfismo de anillos y que $\mathfrak{p}_1 \subset \ker\varphi$, veamos que de hecho se da la igualdad. Si

$f = q(x,y) + 6zh(x,y,z) \in \ker\varphi$ entonces $q(0,y) = 0$. Escribiendo $q(x,y) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, con $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}[y]$, tenemos que $a_0 = q(0,y) = 0$, de donde $q(x,y) = x\left(a_1 + \cdots + a_mx^{m-1}\right)$. Con esto $q(x,y) \in x\mathbb{Z}[x,y]$ y por tanto $f \in \mathfrak{p}_1$. Por el primer teorema de isomorfismo se tiene que $R/\mathfrak{p}_1 = \mathbb{Z}[y]$, el cual es dominio entero, de donde $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{Spec}(R)$.
De manera análoga se muestra que $\mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec}(R)$.
$\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ son incomparables pues $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_2$ y $y \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$.

b) Para ver que $I = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ no es ideal 2-absorbente de R, nótese que $2 \cdot 3 \cdot 6z^2 \in I$. Por cuestiones de grado, es claro que $6 = 2 \cdot 3 \notin I$. Veamos que $12z^2 = 2 \cdot 6z^2 \notin I$ y $18z^2 = 3 \cdot 6z^2 \notin I$. Sólo mostraremos que $18z^2 \notin I$ pues $12z^2 \notin I$ es análogo. Si $18z^2 \in I = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ entonces

$$18z^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(x \cdot p_i + 6z \cdot f_i\right)\left(y \cdot q_i + 6z \cdot g_i\right),$$

donde $p_i, q_i \in \mathbb{Z}[x,y]$ y $f_i, g_i \in \mathbb{Z}[x,y,z]$. Evaluando en $(0,0,1)$ tenemos $18 = 36\sum_{i=1}^{n} f_i(0,0,1)g_i(0,0,1)$, de donde

$$1 = 2\sum_{i=1}^{n} f_i(0,0,1)g_i(0,0,1),$$

pero esto no puede ocurrir en $\mathbb{Z}$. Se sigue que $18z^2 \notin \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = I$.

c) Un argumento análogo al del inciso anterior muestra que $\mathfrak{p}_1^2$ y $\mathfrak{p}_2^2$ no son ideales 2-absorbentes.

2. a) Mostrar que $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 \in \operatorname{Spec}(R)$ es análogo al ejemplo 1. En este caso $R/\mathfrak{p}_1 \cong \mathbb{Z}_2[y,z]$, $R/\mathfrak{p}_2 \cong \mathbb{Z}_2[x,z]$ y $R/\mathfrak{p}_3 \cong \mathbb{Z}_2[x,y]$. Veamos ahora que I no es ideal 3-absorbente de $R = \mathbb{Z}[x,y,z]$. Consideremos los polinomios $f_1 = 2, f_2 = x + y + 2, f_3 = x + z + 2, f_4 = y + z + 2 \in \mathbb{Z}[x,y,z]$. Se tiene que

$$\begin{aligned} f_1f_2f_3f_4 &= 2x^2y + 2xy^2 + 12xy + 4xyz + 2y^2z + 12yz + 4y^2 \\ &\quad +16y + 2x^2z + 12xz + 2xz^2 + 2yz^2 + 4z^2 + 16z \\ &\quad +4x^2 + 16x + 16 \\ &= 2 \cdot 8 + (x + 3y + 3z + 4)4x + (3z + y + 4)4y \\ &\quad +(z+4)4z + (x+y)2xy + (x+z)2xz \\ &\quad +(y+z)2yz + 4 \cdot xyz, \end{aligned}$$

de donde $f_1f_2f_3f_4 \in I$. Veamos que ninguno de $f_1f_2f_3$, $f_1f_2f_4$, $f_1f_3f_4$ y $f_2f_3f_4$ pertenece a I. Que $f_1f_2f_3$, $f_1f_2f_4$, $f_1f_3f_4 \notin I$ son todos análogos, por lo que sólo mostraremos que $f_1f_2f_3 \notin I$. Tenemos

$$f_1f_2f_3 = 2x^2 + 2xy + 8x + 2xz + 2yz + 4z + 4y + 8.$$

Dado que $2xy + 8x + 2xz + 2yz + 4z + 4y + 8 \in I$, si $f_1f_2f_3 \in I$ entonces $2x^2 \in I$. Veamos que esto no puede ocurrir. Supongamos que $2x^2 \in I$ y que

$$2x^2 = 8h_1 + 4xh_2 + 4yh_3 + 4zh_4 + 2xyh_5 + 2xzh_6 + 2yzh_7 + xyzh_8$$

para algunos $h_1, \dots, h_8 \in \mathbb{Z}[x,y,z]$. Evaluando en $(x,0,0)$ tenemos que $2x^2 = 8H_1 + 4xH_2$, donde $H_j := h_j(x,0,0) \in \mathbb{Z}[x]$, y entonces $x^2 = 4H_1 + 2xH_2$. Escribiendo $H_1 = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ y $H_2 = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$, tenemos que

$$x^2 = 4a_0 + (4a_1 + 2b_0)\,x + (4a_2 + 2b_1)\,x^2 + \cdots + 2b_mx^{m+1}$$

así que se debe resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4a_0 &= 0 \\ 4a_1 + 2b_0 &= 0 \\ 4a_2 + 2b_1 &= 1 \\ &\vdots \\ 4a_m + 2b_{m-1} &= 0 \\ 2b_m &= 0. \end{aligned}$$

Sin embargo la ecuación $4a_2 + 2b_1 = 1$ no tiene soluciones enteras pues $\mathrm{MCD}(4,2) = 2 \nmid 1$, por lo que $2x^2 \notin I$ y por tanto $f_1f_2f_3 \notin I$. Por último veamos que $f_2f_3f_4 \notin I$. Haciendo las cuentas necesarias, tenemos que

$$\begin{aligned} f_2f_3f_4 \;=\;& x^2y + xy^2 + y^2z + 2y^2 + x^2z \\ &+ xz^2 + 2x^2 + yz^2 + 2z^2 \\ &+ 8 + 8x + 8y + 8z + 6xy + 6xz + 6yz + 2xyz. \end{aligned}$$

Dado que $8 + 8x + 8y + 8z + 6xy + 6xz + 6yz + 2xyz \in I$, si tuvieramos $f_2f_3f_4 \in I$, se tendría

$$x^2y + xy^2 + y^2z + 2y^2 + x^2z + xz^2 + 2x^2 + yz^2 + 2z^2 \in I,$$

así que $x^2y + xy^2 + y^2z + 2y^2 + x^2z + xz^2 + 2x^2 + yz^2 + 2z^2 = 8h_1 + 4xh_2 + 4yh_3 + 4zh_4 + 2xyh_5 + 2xzh_6 + 2yzh_7 + xyzh_8$ para algunos $h_1, \ldots, h_8 \in \mathbb{Z}[x, y, z]$. Evaluando la igualdad anterior en $(0, 0, z)$, se tiene $2z^2 = 8H_1 + 4zH_4$, donde $H_j := h_j(0, 0, z) \in \mathbb{Z}[z]$; es decir $z^2 = 4H_1 + 2zH_4$ y como en la parte anterior, esto lleva a una ecuación que no tiene soluciones enteras.
Lo anterior muestra que I no es ideal 3-absorbente.

□

Podemos preguntar ahora cómo se comparan $\omega_R(IJ)$, $\omega_R(I)$ y $\omega_R(J)$ cuando I, J son ideales propios del anillo R. Los ejemplos anteriores muestran que $\omega_R(IJ) > \omega_R(I) + \omega_R(J)$ aún cuando $I, J \in \operatorname{Spec}(R)$. Si $I = J \in \operatorname{Spec}(R)$ es idempotente entonces $\omega_R(IJ) = \omega_R\left(I^2\right) = \omega_R(I) = 1 < 2 = \omega_R(I) + \omega_R(J)$.

Si pedimos ahora que los ideales primos sean maximales entonces el producto de estos resultará n-absorbente. Enunciamos este hecho a continuación.

Lema 3.14. Si $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n \in \operatorname{Max}(R)$ son distintos entonces $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ es ideal n-absorbente de R.

Demostración. Por el corolario 1.22 se tiene que $\mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j = (1)$ y del teorema 3.13 se sigue que $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ es ideal n-absorbente de R. □

Mostraremos que de hecho el producto de cualesquiera n ideales maximales es ideal n-absorbente. Tenemos un par de lemas previos.

Lema 3.15. Sean R un anillo y J un ideal propio de R. Si $J^{n+1} \subsetneq J^n$ entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in J$ tales que $a_1 \cdots a_n \in J^n \setminus J^{n+1}$ y $a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_n \notin J^{n+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}_n$.

Demostración. Si $a_1 \cdots a_n \in J^{n+1}$ para todos $a_1, \ldots, a_n \in J$ entonces $J^n \subset J^{n+1} \subsetneq J^n$, lo cual no es posible. Por otro lado, si $a_1 \cdots a_n \in J^n \setminus J^{n+1}$ y para algún $j \in \mathbb{N}_n$ se tuviera que $a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_n \in J^n$ entonces $a_1 \cdots a_n \in J^{n+1}$, que es una contradicción. □

El lema anterior dice que si J es un ideal propio de R tal que $J^{n+1} \subsetneq J^n$ entonces $\omega(J) \geq n$.

Lema 3.16. Sean R un anillo, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ y $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\mathfrak{m}^n$ es ideal n-absorbente de R, además $\omega\left(\mathfrak{m}^n\right) \leq n$ y $\omega\left(\mathfrak{m}^n\right) = n$ si $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$.

Demostración. Supongamos que $a_1 \cdots a_{n+1} \in \mathfrak{m}^n$, donde $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$. Si $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathfrak{m}$ terminamos, así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_{n+1} \notin \mathfrak{m}$. Como $a_{n+1} \notin \mathfrak{m}$ entonces $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m} + (a_{n+1})$ y como $\mathfrak{m}$ es maximal se sigue que $\mathfrak{m} + (a_{n+1}) = R$, pero así $\sqrt{\mathfrak{m}^n} + \sqrt{(a_{n+1})} = R$ y por tanto $\mathfrak{m}^n + (a_{n+1}) = R$. Existen entonces $x \in \mathfrak{m}^n$, $y \in R$ tales que $x + y a_{n+1} = 1$ y así

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_n &= (a_1 \cdots a_n)\, 1 \\ &= a_1 \cdots a_n\, (x + y a_{n+1}) \\ &= x a_1 \cdots a_n + y a_1 \cdots a_n a_{n+1} \end{aligned}$$

y como $x, a_1 \cdots a_{n+1} \in \mathfrak{m}^n$, se sigue que $a_1 \cdots a_n \in \mathfrak{m}^n$. Con esto $\omega\left(\mathfrak{m}^n\right) \leq n$. Supongamos ahora que $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$. Por el lema 3.15 se tiene que $\omega\left(\mathfrak{m}^n\right) \geq n$ y por tanto $\omega\left(\mathfrak{m}^n\right) = n$. □

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del lema anterior.

Corolario 3.17. Si R es un DIP y $p \in R$ es un elemento primo entonces (p^n) es un ideal n-absorbente de R con $\omega\left(p^n\right) = n$.

Demostración. Si $p \in R$ es un elemento primo entonces (p) es un ideal primo no nulo del DIP R, así que es maximal, además, dado que $\left(p^{n+1}\right) \subsetneq \left(p^n\right)$ por el lema anterior se tiene que $\omega\left(p^n\right) = n$. □

Teorema 3.18. Si $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n \in \operatorname{Max}(R)$ entonces $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ es ideal n-absorbente de R. Además $\omega(I) \leq n$.

Demostración. Mostraremos que si $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_m \in \operatorname{Max}(R)$ son distintos y $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ son tales que $n_1 + \cdots + n_m = n$, entonces $I = \mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_m^{n_m}$ es ideal n-absorbente de R. Sean $i \neq j$. Por el corolario 1.22 tenemos $\mathfrak{m}_i^{n_i} + \mathfrak{m}_j^{n_j} = R$. Por el lema 3.16, $\mathfrak{m}_i$ es n_i-absorbente y por 3 del teorema 3.3 se tiene $\mathfrak{m}_1^{n_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_m^{n_m}$ es $n = (n_1 + \cdots + n_m)$-absorbente. Como $\mathfrak{m}_i^{n_i}$ y $\mathfrak{m}_j^{n_j}$ son primos entre sí, se tiene que $\mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_m^{n_m} = \mathfrak{m}_1^{n_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_m^{n_m} = I$. Es claro ahora que $\omega(I) \leq n$. □

El siguiente resultado es consecuencia del teorema anterior y de la primera parte del teorema 3.8.

Corolario 3.19. Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m \in \operatorname{Spec}(R)$ incomparables y sea $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{n_m}$, con $n_j \in \mathbb{N}$ y $n_1 + \cdots + n_m = n$. Si $S = R \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_m)$ entonces $S(I) := \left\{x \in R : x/1 \in S^{-1} I\right\}$ es un ideal n-absorbente de R. En particular, la potencia simbólica $\mathfrak{p}^{(n)} = S\left(\mathfrak{p}^n\right)$ es un ideal n-absorbente de R para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Más aún $\omega_R(S(I)) \leq \omega_R(I)$ y $\omega_R\left(\mathfrak{p}^{(n)}\right) \leq \omega_R\left(\mathfrak{p}^n\right)$.

Demostración. Es claro que S es un sistema multiplicativo. Sea

$$f : R \longrightarrow S^{-1}R$$

el morfismo natural, el cual está dado por $r \mapsto r/1$. Note que $S(I) = f^{-1}\left(S^{-1}I\right)$. Dado que $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m \in \operatorname{Spec}(R)$ son incomparables se tiene que $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ son elementos maximales del conjunto $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$, así que por [5, proposición 17 a), p. 93] los únicos ideales maximales de $S^{-1}R$ son precisamente $S^{-1}\mathfrak{p}_1, \ldots, S^{-1}\mathfrak{p}_m$ y por el teorema 3.18 se sigue que

$$\left(S^{-1}\mathfrak{p}_1\right)^{n_1} \cdots \left(S^{-1}\mathfrak{p}_m\right)^{n_m} = S^{-1}\left(\mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{n_m}\right) = S^{-1}I$$

es ideal n-absorbente de $S^{-1}R$. Por el inciso 1 del teorema 3.8 tenemos $S(I) = f^{-1}\left(S^{-1}I\right)$ es ideal n-absorbente de R.
Por otro lado, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ entonces $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ es el único ideal maximal de $R_\mathfrak{p}$ y por tanto $\left(\mathfrak{p}^n\right)_\mathfrak{p} = \left(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}\right)^n$ es ideal n-absorbente de $R_\mathfrak{p}$. De la primera parte del teorema 3.8 tenemos que $\mathfrak{p}^{(n)}$ es ideal n-absorbente de R.
Falta ver que $\omega_R(S(I)) \leq \omega_R(I)$; notemos que si, para todo $n \in \mathbb{N}$, I no es n-absorbente entonces $\omega_R(I) = \infty \geq \omega_R\left(S(I)\right)$. Si I es k-absorbente para algún $k \in \mathbb{N}$, por 1 del teorema 3.8 se tiene que

$$\omega_R\left(S(I)\right) \leq \omega_{S^{-1}R}\left(S^{-1}I\right) \tag{3.3}$$

y del teorema 3.7

$$\omega_{S^{-1}R}\left(S^{-1}I\right) \leq \omega_R(I). \tag{3.4}$$

De (3.3) y (3.4) se tiene el resultado. Es claro ahora que $\omega_R\left(\mathfrak{p}^{(n)}\right) \leq \omega_R\left(\mathfrak{p}^n\right)$. $\square$

Ejemplo 7. Las desigualdades en el corolario anterior pueden ser estrictas. Sean $R = \mathbb{Z}[x,y] + 6z\mathbb{Z}[x,y,z] \subset \mathbb{Z}[x,y,z]$, $\mathfrak{p}_1 = x\mathbb{Z}[x,y] + 6z\mathbb{Z}[x,y,z]$, $\mathfrak{p}_2 = y\mathbb{Z}[x,y] + 6z\mathbb{Z}[x,y,z]$ e $I = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. En 1 b) del ejemplo 6 se mostró que I no es 2-absorbente, por lo que $\omega_R(I) > 2$. En 1 a) del mismo ejemplo se mostró que $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec}(R)$ son incomparables, de esta manera, si $S = R \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2)$ entonces S es un sistema multiplicativo y $S^{-1}R$ es un anillo quasi-local, con ideales maximales $S^{-1}\mathfrak{p}_1$ y $S^{-1}\mathfrak{p}_2$ ([5, proposición 17 a), p.93]), por el lema 3.14 se tiene que

$$S^{-1}\mathfrak{p}_1 S^{-1}\mathfrak{p}_2 = S^{-1}\left(\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\right) = S^{-1}I$$

es ideal 2-absorbente de $S^{-1}R$, por tanto $S(I)$ es ideal 2-absorbente de R, de donde $\omega_R(S(I)) \leq 2$. De hecho $\omega_R(S(I)) = 2$: Dado que $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ son incomparables, existen $a \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_2$ y $b \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$, así que $\frac{a}{1} \in S^{-1}\mathfrak{p}_1$ y $\frac{b}{1} \in S^{-1}\mathfrak{p}_2$, nótese que $\frac{a}{1} \notin S^{-1}\mathfrak{p}_2$, pues en caso contrario existiría $s \in S = R \setminus (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2)$ tal que $sa \in \mathfrak{p}_2$, pero esto no puede ocurrir pues $\mathfrak{p}_2$ es ideal primo y $s, a \notin \mathfrak{p}_2$. De manera análoga se tiene que $\frac{b}{1} \notin S^{-1}\mathfrak{p}_1$. Con esto $a \in S(\mathfrak{p}_1) \setminus S(\mathfrak{p}_2)$ y $b \in S(\mathfrak{p}_2) \setminus S(\mathfrak{p}_1)$. Ahora

$$\frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \in \left(S^{-1}\mathfrak{p}_1\right) \cap \left(S^{-1}\mathfrak{p}_2\right) = \left(S^{-1}\mathfrak{p}_1\right)\left(S^{-1}\mathfrak{p}_2\right) = S^{-1}I$$

por lo que $ab \in S(I)$ pero $a \notin S(I)$ y $b \notin S(I)$; es decir, $S(I) \notin \operatorname{Spec}(R)$ y por tanto $\omega_R(S(I)) = 2$. Lo anterior muestra que $\omega_R(S(I)) = 2 < \omega_R(I)$. Del ejemplo 6 también se tiene que $\mathfrak{p}_1^2$ no es ideal 2-absorbente, por lo que $\omega_R(\mathfrak{p}_1) > 2$. En el anillo local $R_{\mathfrak{p}_1}$, con único ideal maximal $(\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{p}_1}$, se tiene que $(\mathfrak{p}_1^2)_{\mathfrak{p}_1} = \left((\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{p}_1}\right)^2$ es ideal 2-absorbente, de donde $\mathfrak{p}_1^{(2)} = S(\mathfrak{p}_1^2)$ es ideal 2-absorbente de R. Con esto $\omega_R\left(\mathfrak{p}_1^{(2)}\right) \leq 2 < \omega_R(\mathfrak{p}_1^2)$.

El siguiente objetivo es mostrar que si un ideal n-absorbente I de R es tal $\operatorname{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$, con $|\operatorname{Min}_R(I)| = n$, entonces $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset I$ (ver teorema 3.23). Observe que si $\mathfrak{p}_1 \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(R)$ son incomparables e $I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$ entonces $\sqrt{I} = I$, $\omega(I) = n$ y $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n = I$. Esta inclusión puede ser estricta. Por ejemplo, si $R = \mathbb{Z}[x, y]$ y $\mathfrak{p}_1 = (2, x)$, $\mathfrak{p}_2 = (2, y)$, siguiendo la misma idea del inciso 2 a) del ejemplo 6 se puede probar que $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec}(R)$ y que son incomparables, pero si $I = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ entonces $(4, 2x, 2y, xy) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subsetneq I$ pues $2 \in I \setminus \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$.

El siguiente lema será de utilidad en el corolario 3.22.

Lema 3.20. Sean R un anillo, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(R)$ incomparables. Sea además I un ideal n-absorbente de R tal que $I \subset \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$. Si $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \in I$ para algunos $n_i \in \mathbb{N}$ y $x_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ entonces $x_1 \cdots x_n \in I$. Consecuentemente, si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Min}_R(I)$ son distintos entonces $x_1 \cdots x_n \in I$.

Demostración. Como $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \in I$ e I es ideal n-absorbente, se tiene que $x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n} \in I$, donde $l_1, \ldots, l_n$ son tales que $0 \leq l_i \leq n_i$ y $l_1 + \cdots + l_n = n$. Si $l_i = 0$ para algún i entonces $x_1^{l_1} \cdots \widehat{x_i^{l_i}} \cdots x_n^{l_n} \in I \subset \mathfrak{p}_i$ y así $x_j \in \mathfrak{p}_i$ para algún $j \neq i$, lo cual es una contradicción. Se sigue que $x_1 \cdots x_n \in I$. Si ahora $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Min}_R(I)$ son distintos entonces

$$x_1 \cdots x_n \in \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n = \sqrt{I},$$

así que por el inciso 5 del teorema 3.3 se tiene que $x_1^n \cdots x_n^n \in I$ y de la primera parte se concluye que $x_1 \cdots x_n \in I$. $\square$

A continuación se presentan un par de resultados técnicos que serán de utilidad en la prueba del teorema 3.23.

Proposición 3.21. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(R)$ incomparables y $j_0 \in \mathbb{N}_n$. Dado $a \in \mathfrak{p}_{j_0}$, existen $d \in \mathfrak{p}_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$ así como $b \in R$ tales que $x = bd + a \in \mathfrak{p}_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$.

Demostración. Como $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ son incomparables, para cada $i \neq j_0$ existe $c_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \bigcup\limits_{l \neq i} \mathfrak{p}_l$. Tenemos dos posibles casos para $a \in \mathfrak{p}_{j_0}$:

1. $a \in \bigcup\limits_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$. En este caso sea $d \in \mathfrak{p}_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$, el cual existe pues $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ son incomparables. Resta encontrar $b \in R$ tal que $bd + a \in \mathfrak{p}_{j_0} \setminus \bigcup\limits_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$.

   Sean

   $$\begin{array}{rcl} F & = & \{m \in \mathbb{N}_n : a \notin \mathfrak{p}_m\} \\ D & = & \{m \in \mathbb{N}_n : m \neq j_0, a \in \mathfrak{p}_m\} \end{array}$$

   y nótese que $F \cap D = \emptyset$ y $F \cup D = \mathbb{N}_n \setminus \{j_0\}$. Definimos entonces

   $$b = \begin{cases} \prod\limits_{l \in F} c_l & \text{si } F \neq \emptyset, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   Queremos ver que $x \in \mathfrak{p}_{j_0}$ y $x \notin \mathfrak{p}_i$ para todo $i \neq j_0$.

   - Si $F = \emptyset$ entonces $D = \mathbb{N}_n \setminus \{j_0\}$, $b = 1$ y $x = d + a$. Dado $m \in D$, se tiene que $a \in \mathfrak{p}_m$ y $m \neq j_0$, por lo que $d \notin \mathfrak{p}_m$, por tanto $x = d + a \notin \mathfrak{p}_m$, esto para cada $m \in D$.
   - Si $F \neq \emptyset$ entonces $b = \prod\limits_{l \in F} c_l$. Para $m \in \mathbb{N}_n \setminus \{j_0\}$ se tienen dos subcasos

     a) $m \in F$. Aquí, dado que $d \prod\limits_{l \in F} c_l \in \mathfrak{p}_m$ y $a \notin \mathfrak{p}_m$, entonces $x \notin \mathfrak{p}_m$.

b) $m \in D$. En este caso $a \in \mathfrak{p}_m$ y como $m \neq j_0$, se tiene que $d \notin \mathfrak{p}_m$; como además $c_l \notin \mathfrak{p}_m$ para todo $l \in F$, tenemos $bd = d \prod_{l \in F} c_l \notin \mathfrak{p}_m$ y así $x \notin \mathfrak{p}_m$.

Lo anterior muestra que $x \notin \mathfrak{p}_m$ para todo $m \in F \cup D$; es decir, $x \notin \bigcup_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$. Por otro lado, como $d \in \mathfrak{p}_{j_0}$, entonces $bd \in \mathfrak{p}_{j_0}$, así que $a \in \mathfrak{p}_{j_0}$ y $bd \in \mathfrak{p}_{j_0}$ implica $x = bd + a \in \mathfrak{p}_{j_0}$, por lo cual $x \in \mathfrak{p}_{j_0} \setminus \bigcup_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$.

2. $a \notin \bigcup_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$. En este caso tomamos $d = a$ y $b = 0$. Claramente $d \in \mathfrak{p}_{j_0} \setminus \bigcup_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$ y $x = bd + a \in \mathfrak{p}_{j_0} \setminus \in \bigcup_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$

□

Notación: Dados $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ideales de un anillo R, se denota y define

$$\mathfrak{p}_j \prod_{i \neq j} c_i = \left\{ a \prod_{i \neq j} c_i : a \in \mathfrak{p}_j \right\}.$$

Corolario 3.22. Sean $n \geq 2$ e I un ideal n-absorbente de R tal que $\mathrm{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$, donde $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ si $i \neq j$. Sean además $j_0 \in \mathbb{N}_n$ y, para cada $i \neq j_0$ con $1 \leq i \leq n$, $c_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \bigcup_{l \neq i} \mathfrak{p}_l$. Se tiene que $\mathfrak{p}_{j_0} \prod_{i \neq j_0} c_i \subset I$.

Demostración. Sea $a \in \mathfrak{p}_{j_0}$. Dado que $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ son incomparables, por la proposición 3.21 existen $b \in R$ y $d \in \mathfrak{p}_{j_0} \setminus \bigcup_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$ tales que $x = bd + a \in \mathfrak{p}_{j_0} \setminus \bigcup_{i \neq j_0} \mathfrak{p}_i$. Como además $c_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \bigcup_{l \neq j_0} \mathfrak{p}_l$, de la segunda parte del lema 3.20 se tiene que $x \prod_{i \neq j_0} c_i \in I$. De manera análoga se tiene que $d \prod_{i \neq j_0} c_i \in I$. Por último observe que

$$a \prod_{i \neq j_0} c_i = (bd + a) \prod_{i \neq j_0} c_i - bd \prod_{i \neq j_0} c_i = x \prod_{i \neq j_0} c_i - b \left(d \prod_{i \neq j_0} c_i \right) \in I,$$

de donde $\mathfrak{p}_{j_0} \prod_{i \neq j_0} c_i \subset I$. □

El siguiente teorema es la generalización de un resultado ya establecido para los idales 2-absorbentes (ver segunda parte del teorema 2.12).

Teorema 3.23. Sea I un ideal n-absorbente del anillo R tal que $\mathrm{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots \mathfrak{p}_n\}$, donde $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ si $i \neq j$. Se tiene que $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset I$ y además $\omega(I) = n$.

Demostración. Si $n = 1$ entonces $I \in \mathrm{Spec}(R)$ y trivialmente se tiene la afirmación. Supongamos entonces que $n \geq 2$. Mostraremos que todos los generadores de $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ pertenecen a I. Para cada $i = 1, \ldots, n$, sea $a_i \in \mathfrak{p}_i$. Tomando $j_0 = 1$ en el corolario 3.22, se tiene que $a_1 \prod_{i=2}^{n} c_i \in I$ para cualquier elección de $c_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \left(\mathfrak{p}_1 \cup \left(\bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j\right)\right)$. Supongamos ahora que para algún $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ se tiene que $(a_1 \cdots a_k) \prod_{i=k+1}^{n} c_i \in I$ para cualquier elección de $c_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \left(\mathfrak{p}_1 \cup \left(\bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j\right)\right)$, con $k+1 \leq i \leq n$; mostraremos que $(a_1 \cdots a_{k+1}) \prod_{i=k+2}^{n} c_i \in I$ para cualquier elección de $c_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \left(\mathfrak{p}_1 \cup \left(\bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j\right)\right)$ con $k+2 \leq i \leq n$. Por la proposición 3.21, existen $d_{k+1} \in \mathfrak{p}_{k+1} \setminus \bigcup_{j \neq k+1} \mathfrak{p}_j$ así como $b_{k+1} \in R$ tales que $b_{k+1} d_{k+1} + a_{k+1} \in \mathfrak{p}_{k+1} \setminus \bigcup_{j \neq k+1} \mathfrak{p}_j$. Sea $c_{k+1} = b_{k+1} d_{k+1} + a_{k+1}$ y observe que

$$
\begin{aligned}
(a_1 \cdots a_k) \prod_{i=k+1}^{n} c_i &= (a_1 \cdots a_k)\, c_{k+1} \prod_{i=k+2}^{n} c_i \\
&= (a_1 \cdots a_k)\, (b_{k+1} d_{k+1} + a_{k+1}) \prod_{i=k+2}^{n} c_i \\
&= (b_{k+1} a_1 \cdots a_k d_{k+1}) \prod_{i=k+2}^{n} c_i + (a_1 \cdots a_{k+1}) \prod_{i=k+2}^{n} c_i
\end{aligned}
$$

Por hipótesis se tiene que $(a_1 \cdots a_k) \prod_{i=k+1}^{n} c_i \in I$ y, dado que $d_{k+1} \in \mathfrak{p}_{k+1} \setminus \bigcup_{j \neq k+1} \mathfrak{p}_j$, también por hipótesis se tiene que $(b_{k+1} a_1 \cdots a_k d_{k+1}) \prod_{i=k+2}^{n} c_i \in I$,

por lo cual $(a_1 \cdots a_{k+1}) \prod_{i=k+2}^{n} c_i \in I$. De manera particular, si $k = n-1$ entonces $(a_1 \cdots a_{n-1})(b_n d_n + a_n) \in I$ y por lo tanto $a_1 \cdots a_n \in I$, de donde se sigue que $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset I$.
Falta ver que $\omega(I) = n$. Ya tenemos que $\omega(I) \leq n$ pues I es n-absorbente. Para ver que $\omega(I) \geq n$, sean $x_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \bigcup_{j\neq i} \mathfrak{p}_j$. Tales elementos existen pues los ideales primos $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ son incomparables. De la primera parte de la demostración se tiene que $x_1 \cdots x_n \in \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset I$, pero, para todo $j = 1, \ldots, n$, se tiene que $x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n \notin I$ pues de lo contrario $x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n \in \mathfrak{p}_j$ y así $x_i \in \mathfrak{p}_j$ para algún $i \neq j$, lo cual es una contradicción. Se sigue que $\omega(I) \geq n$ y por tanto $\omega(I) = n$. $\square$

El siguiente corolario proporciona varios casos en los que la contención mencionada en el teorema anterior es impropia.

Corolario 3.24. Sea I un ideal n-absorbente de R tal que $\mathrm{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$, $|\mathrm{Min}_R(I)| = n$. Si $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = (1)$ para todos $i \neq j$ entonces $I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$, además $\omega(I) = n$. En particular, esto se cumple si $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Max}(R)$ para todo $i \in \mathbb{N}_n$, $\dim(R) = 0$ o R es dominio entero con $\dim(R) \leq 1$.

Demostración. Por el teorema anterior tenemos $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset I$, pero $I \subset \sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$ y así $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset I \subset \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$. Ahora, como $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = (1)$ para todos $i \neq j$, entonces $\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$, de donde se sigue que $I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$.
Del teorema anterior también se sigue que $\omega(I) = n$. Por otro lado

a) Si $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Max}(R)$ para todo $i \in \mathbb{N}_n$ entonces $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = (1)$ y así $I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$.

b) Si $\dim(R) = 0$ entonces todo ideal primo de R es maximal, así que por el inciso anterior $I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$.

c) Si R es dominio entero con $\dim(R) \leq 1$ entonces todo ideal primo no nulo es maximal, o bien, todo ideal primo es maximal, en cualquier caso se tiene que $I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$.

$\square$

Corolario 3.25. Sea I un ideal n-absorbente de R tal que $\mathrm{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$, $|\mathrm{Min}_R(I)| = n$. En $R_{\mathfrak{p}_i}$ se tiene que $I_{\mathfrak{p}_i} = (\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i}$.

Demostración. Si $n = 1$ entonces $I \in \operatorname{Spec}(R)$ y la afirmación es clara, así que podemos suponer que $n \geq 2$. Sea $j \in \mathbb{N}_n$. Como $I \subset \mathfrak{p}_j$, en $R_{\mathfrak{p}_j}$ se tiene que $I_{\mathfrak{p}_j} \subset (\mathfrak{p}_j)_{\mathfrak{p}_j}$. Para la otra contención, sea $a \in \mathfrak{p}_j$ y, para cada $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{j\}$, sean $c_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \bigcup_{k \neq i} \mathfrak{p}_k$, tales elementos existen pues los $\mathfrak{p}_i's$ son incomparables. Si $c = \prod_{i \neq j} c_i$ entonces $c \in R \setminus \mathfrak{p}_j$ y así $ca \in \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$. Por el teorema 3.23 se sigue que $ca \in I$, de donde $\dfrac{a}{s} = \dfrac{ca}{cs} \in I_{\mathfrak{p}_j}$ para todo $s \in R \setminus \mathfrak{p}_j$, por tanto $(\mathfrak{p}_j)_{\mathfrak{p}_j} = I_{\mathfrak{p}_j}$. □

El siguiente teorema proporciona un criterio sencillo para mostrar que un ideal primario es n-absorbente.

Teorema 3.26. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ e I es un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R tal que $\mathfrak{p}^n \subset I$ para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces I es ideal n-absorbente de R con $\omega(I) \leq n$. En particular, si $\mathfrak{p}^n$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario de R entonces $\mathfrak{p}^n$ es ideal n-absorbente de R con $\omega(\mathfrak{p}^n) \leq n$ y $\omega(\mathfrak{p}^n) = n$ si $\mathfrak{p}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{p}^n$.

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$ tales que $a_1 \cdots a_{n+1} \in I$. Si para algún $j \in \mathbb{N}_{n+1}$ se tuviera que $a_j \notin \sqrt{I} = \mathfrak{p}$, como I es $\mathfrak{p}$-primario, se tendría que $a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_{n+1} \in I$ y terminamos. Supongamos entonces que $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathfrak{p}$ y así se tiene que $a_1 \cdots a_n \in \mathfrak{p}^n$, y como $\mathfrak{p}^n \subset I$ se sigue que $a_1 \cdots a_n \in I$. Es claro ahora que $\omega(I) \leq n$.
Ahora bien, si $\mathfrak{p}^n$ es $\mathfrak{p}$-primario es claro que $\mathfrak{p}^n$ es n-absorbente y así $\omega(\mathfrak{p}^n) \leq n$. Por otro lado, si $\mathfrak{p}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{p}^n$ entonces, por el lema 3.15, $\omega(\mathfrak{p}^n) \geq n$ y por tanto $\omega(\mathfrak{p}^n) = n$. □

El teorema anterior resulta ser muy útil en la clase de los anillos noetherianos (ver teorema 3.62).

Es posible ahora enunciar el ejemplo 4 de manera más general.

Ejemplo 8.

1. Sean $R = \mathbb{Q}[x]$, $T = \mathbb{Q}[x, y]$ y $J = (x, y^n)\, T$, $n > 2$. Si $\mathfrak{m} =: (x, y)T$ entonces $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(T)$ y además J es ideal $\mathfrak{m}$-primario de T tal que $\mathfrak{m}^n \subset J$, por el teorema anterior J es ideal n-absorbente de T. No es $(n-1)$-absorbente pues $y^n \in J$ pero $y^{n-1} \notin J$, así que $\omega_T(J) = n$. Dado que $J \cap R = xR$ entonces $\omega_R(J \cap R) = 1$ y así $\omega_R(J \cap R) < \omega_T(J)$.

2. Sean $R = \mathbb{Q}[x, y]$, $T = \mathbb{Q}[x]$ y $f : R \longrightarrow T$ es el morfismo dado por $p(x, y) \mapsto p(x, 0)$. Si $I_1 = (x^n + y)\, R$ e $I_2 = (x, y^n)\, R$, con $n > 2$, entonces f es epimorfismo de anillos con $\ker f = yR$ y $\ker f \nsubseteq I_1$, $\ker f \nsubseteq I_2$, además

a) $\omega_R(I_1) = 1$ pues $x^n + y$ es irreducible. Dado que $f(I_1) = x^n T$, $xT \in \operatorname{Max}(T)$ y $x^{n+1}T \subsetneq x^n T$, por el teorema 3.26 se tiene que $\omega_T(f(I_1)) = n$, así que $\omega_R(I_1) < \omega_T(f(I_1))$.

b) $f(I_2) = xT \in \operatorname{Spec}(T)$, de donde $\omega_T(f(I_2)) = 1$ y por el inciso anterior $n = \omega_R(I_2) > \omega_T(f(I_2))$.

Mostraremos ahora que si un ideal n-absorbente tiene radical primo dividido entonces es primario (teorema 3.29). Tenemos definiciones y resultados previos.

Definición 3.27. Sean R un anillo y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

a) Se dice que $\mathfrak{p}$ es *ideal primo dividido* si $\mathfrak{p} \subsetneq (x)$ para todo $x \in R \setminus \mathfrak{p}$.

b) *R dominio dividido* si es dominio entero y todo ideal primo de R es ideal primo dividido.

El lema 3.28 produce ejemplos de dominios divididos.

Observación 7. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ es un ideal primo dividido entonces $\mathfrak{p}$ es comparable con cualquier ideal de R. En efecto, sea J un ideal de R tal que $J \not\subseteq \mathfrak{p}$, existe así $x \in J \setminus \mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es primo dividido se tiene que $\mathfrak{p} \subsetneq (x) \subset J$.

Daremos ahora ejemplos de anillos en los cuales todo ideal primo es ideal primo dividido, debemos recordar primero los anillos de valuación. Se dice que un dominio entero R es un *anillo de valuación* si para todos $x, y \in R$ tales que $x, y \neq 0$, se tiene que $x|y$ o $y|x$ (en R). En la sección A.2 del apéndice A se mencionan otras definiciones equivalentes de los anillos de valuación así como algunas propiedades que estos poseen.

Lema 3.28. Todo anillo de valuación es dominio dividido.

Demostración. Sean $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ y $a \in R \setminus \mathfrak{p}$. Debemos mostrar que $\mathfrak{p} \subsetneq (a)$. Como $a \notin \mathfrak{p}$, es claro que $\mathfrak{p} \neq (a)$ y $a \neq 0$. Sea $x \in \mathfrak{p}$, si $x = 0$ entonces $x \in (a)$ y terminamos, por lo que podemos suponer que $x \neq 0$. Como R es anillo de valuación se tiene que $x|a$ o $a|x$. No puede ocurrir que $x|a$, de lo contrario $a = rx$ para algún $r \in R$ y así $a \in \mathfrak{p}$ lo cual es una contradicción. Se tiene entonces que $a|x$ y por tanto $x \in (a)$. □

Teorema 3.29. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo dividido de un anillo R e I es un ideal n-absorbente de R con $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$, entonces I es un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R.

Demostración. Sean $a, b \in R$ tales que $ab \in I \subset \mathfrak{p}$ pero $b \notin \sqrt{I} = \mathfrak{p}$, tenemos entonces que $b^{n-1} \notin \mathfrak{p}$, como $\mathfrak{p}$ es primo dividido se sigue que $\mathfrak{p} \subsetneq (b^{n-1})$ y además, dado que $ab \in \mathfrak{p}$ y $b \notin \mathfrak{p}$ entonces $a \in \mathfrak{p}$ y así $a = rb^{n-1}$, de donde $rb^n = ab \in I$. Como I es n-absorbente y $b^n \notin I$, tenemos $a = rb^{n-1} \in I$. Esto muestra que I es primario y como además $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ se tiene también que I es $\mathfrak{p}$-primario. □

Teorema 3.30. Sea R un anillo tal que $\mathrm{Nil}(R)$ es ideal primo dividido. Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ es ideal primo dividido tal que $\mathrm{Nil}(R) \subsetneq \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{p}^n$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R. Por tanto, $\mathfrak{p}^n$ es ideal n-absorbente de R con $\omega(\mathfrak{p}^n) \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además $\omega(\mathfrak{p}^n) = n$ si $\mathfrak{p}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{p}^n$.

Demostración. Tenemos $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$. Veamos que $\mathfrak{p}^n$ es primario. Sean $a, b \in R$ tales que $ab \in \mathfrak{p}^n$ pero $b \notin \sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$. Debemos mostrar que $a \in \mathfrak{p}^n$. Como $ab \in \mathfrak{p}^n$ entonces $ab = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} z_{i1} z_{i2} \cdots z_{in}$, con $z_{ij} \in \mathfrak{p}$, y como $\mathfrak{p}$ es ideal primo dividido y $b \notin \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{p} \subsetneq (b)$, de donde $z_{ij} \in (b)$; es decir $z_{ij} = r_{ij} b$ para algunos $r_{ij} \in R$, de hecho $r_{ij} \in \mathfrak{p}$: Como $r_{ij} b = z_{ij} \in \mathfrak{p}$ y $b \notin \mathfrak{p}$ entonces $r_{ij} \in \mathfrak{p}$, de esta manera $z_{i1} \cdots z_{in} = b^n (r_{i1} \cdots r_{in})$, si $s_i = r_{i1} \cdots r_{in}$ entonces $s_i \in \mathfrak{p}^n$ y así $ab = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} b^n s_i = b^n \sum_{i=1}^{k} s_i = b^n s$, donde $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} s_i \in \mathfrak{p}^n$. Con esto $b\left(a - b^{n-1}s\right) = 0 \in \mathrm{Nil}(R) \subsetneq \mathfrak{p}$ y dado que $\mathrm{Nil}(R) \in \mathrm{Spec}(R)$ y $b \notin \mathfrak{p}$, se sigue que

$$a - b^{n-1}s \in \mathrm{Nil}(R). \tag{3.5}$$

Ahora bien, $\mathrm{Nil}(R) \subsetneq \mathfrak{p}$, así que existe $x \in \mathfrak{p}$ tal que $x \notin \mathrm{Nil}(R)$ y dado que $\mathrm{Nil}(R)$ es ideal primo y dividido se sigue que $x^n \notin \mathrm{Nil}(R)$ y $\mathrm{Nil}(R) \subsetneq (x^n) \subset \mathfrak{p}^n$, así que de (3.5) tenemos $a - b^{n-1}s \in \mathfrak{p}^n$, como $b^{n-1}s \in \mathfrak{p}^n$ pues $s \in \mathfrak{p}^n$ se tiene que $a \in \mathfrak{p}^n$. Esto muestra que $\mathfrak{p}^n$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario.
Para terminar, por el teorema 3.26 se sigue que $\mathfrak{p}^n$ es n-absorbente con $\omega(\mathfrak{p}^n) \leq n$ y además $\omega(\mathfrak{p}^n) = n$ si $\mathfrak{p}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{p}^n$. □

Dados un ideal I de un anillo R y $x \in R$ investigaremos cuando el conductor de x en I; $(I :_R x) := \{y \in R : yx \in I\}$, es un ideal n-absorbente de R.

Teorema 3.31. Sea I un ideal n-absorbente de R. Si $x \in R \setminus I$ entonces $(I :_R x)$ es también ideal n-absorbente de R. Además $\omega(I :_R x) \leq \omega(I)$ para todo $x \in R$.

Demostración. Si $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$ son tales que $a_1 \cdots a_{n+1} \in (I :_R x)$ entonces $a_1 \cdots a_n (a_{n+1} x) \in I$, dado que I es ideal n-absorbente se tiene

que $a_1 \cdots a_n \in I$, en cuyo caso $a_1 \cdots a_n x \in I$ y así $a_1 \cdots a_n \in (I :_R x)$, o bien, reagrupando de ser necesario, $a_2 \cdots a_n (a_{n+1} x) \in I$, en cuyo caso $a_2 \cdots a_{n+1} \in (I :_R x)$. En cualquier caso se tiene que $(I :_R x)$ es n-absorbente.
Ahora, dado $x \in R$ tenemos dos posibles casos

1. $x \in I$. En este caso $(I :_R x) = R$, así que $\omega (I :_R x) = \omega(R) = 0 \leq \omega(I)$.

2. $x \in R \setminus I$. Como I es $\omega(I)$-absorbente, por la primera parte de la demostración tenemos que $(I :_R x)$ es $\omega(I)$-absorbente y por tanto $\omega (I :_R x) \leq \omega(I)$.

□

El ejemplo 10 muestra que la desigualdad del teorema anterior puede ser estricta para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$.

Teorema 3.32. Sean $n \geq 2$ e I un ideal n-absorbente de R tal que $I \subsetneq \sqrt{I}$. Sean además $x \in \sqrt{I} \setminus I$ y $m \in \mathbb{N}$ el mínimo entero tal que $x^m \in I$. Se tiene que $\left(I :_R x^{m-1}\right)$ es un ideal $(n-m+1)$-absorbente de R.

Demostración. Por el inciso 5 del teorema 3.3 se tiene que $x^n \in I$, como $n \geq 2$ entonces $2 \leq m \leq n$, por lo que $n - m \geq 0$ y entonces $n - m + 1 \geq 1$. Si $a_1, \ldots, a_{n-m+2} \in R$ son tales que $a_1 \cdots a_{n-m+2} \in \left(I :_R x^{m-1}\right)$ entonces $x^{m-1} a_1 \cdots a_{n-m+2} \in I$, de donde $x^{m-1} a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_{n-m+2} \in I$ para algún $j \in \mathbb{N}_{n-m+2}$, o bien, $x^{m-2} a_1 \cdots a_{n-m+2} \in I$, esto pues I es n-absorbente. Si $x^{m-1} a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_{n-m+2} \in I$ entonces $a_1 \cdots a_{n-m+1} \in \left(I :_R x^{m-1}\right)$ y terminamos. Supongamos entonces que $x^{m-1} a_1 \cdots \widehat{a_j} \cdots a_{n-m+2} \notin I$ para todo $j \in \mathbb{N}_{n-m+2}$, y por tanto $x^{m-2} a_1 \cdots a_{n-m+2} \in I$. Observe ahora que, como $x^m \in I$ entonces $x^m a_1 \cdots a_{n-m+1} \in I$ y como por hipótesis $x^{m-1} a_1 \cdots a_{n-m+2} \in I$, se tiene que $x^{m-1} a_1 \cdots a_{n-m+2} + x^m a_1 \cdots a_{n-m+1} \in I$, pero

$$x^{m-1} a_1 \cdots a_{n-m+2} + x^m a_1 \cdots a_{n-m+1} = x^{m-1} a_1 \cdots a_{n-m+1} \left(a_{n-m+2} + x\right)$$

por lo que $x^{m-1} a_1 \cdots a_{n-m+1} \left(a_{n-m+2} + x\right) \in I$; dado que I es n-absorbente y $x^{m-1} a_1 \cdots a_{n-m+1} \notin I$ se sigue que

$$x^{m-2} a_1 \cdots a_{n-m+1} \left(a_{n-m+2} + x\right) \in I,$$

es decir

$$x^{m-2} a_1 \cdots a_{n-m+1} a_{n-m+2} + x^{m-1} a_1 \cdots a_{n-m+1} \in I. \tag{3.6}$$

Como $x^{m-2}a_1\cdots a_{n-m+1}a_{n-m+2}\in I$, la relación (3.6) implica que

$$x^{m-1}a_1\cdots a_{n-m+1}\in I$$

lo cual es una contradicción. Esta contradicción se obtuvo al suponer que $x^{m-1}a_1\cdots\widehat{a_j}\cdots a_{n-m+2}\notin I$ para todo $j\in\mathbb{N}_{n-m+2}$. $\square$

Se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 3.33. Sean $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, e I un ideal n-absorbente de R tal que $I\subsetneq\sqrt{I}$. Si $x\in\sqrt{I}\setminus I$ y $x^n\in I$ pero $x^{n-1}\notin I$, entonces $\left(I:_R x^{n-1}\right)\in\operatorname{Spec}(R)$ y es tal que $\sqrt{I}\subset\left(I:_R x^{n-1}\right)$.

Demostración. Por el teorema anterior $\left(I:_R x^{n-1}\right)$ es un ideal $(n-n+1)$-absorbente de R, es decir, 1-absorbente y así un ideal primo. Dado que $I\subset\left(I:_R x^{n-1}\right)$ entonces $\sqrt{I}\subset\sqrt{\left(I:_R x^{n-1}\right)}=\left(I:_R x^{n-1}\right)$. $\square$

Corolario 3.34. Sean $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, e I un ideal n-absorbente de R que es ideal $\mathfrak{p}$-primario para algún $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)$. Si $x\in\sqrt{I}\setminus I$ y n es el menor natural tal que $x^n\in I$ entonces $\left(I:_R x^{n-1}\right)=\mathfrak{p}$.

Demostración. Como I es $\mathfrak{p}$-primario se tiene que $\sqrt{I}=\mathfrak{p}$ y por el corolario anterior se sigue que $\mathfrak{p}=\sqrt{I}\subset\left(I:_R x^{n-1}\right)$. Para la otra contención, sea $y\in\left(I:_R x^{n-1}\right)$ entonces $x^{n-1}y\in I$. Como I es primario y $x^{n-1}\notin I$ entonces $y\in\sqrt{I}=\mathfrak{p}$, por lo que $\left(I:_R x^{n-1}\right)\subset\mathfrak{p}$ y por tanto $\left(I:_R x^{n-1}\right)=\mathfrak{p}$. $\square$

Los teoremas 3.35 y 3.36 a continuación consideran los casos en los que $(I:_R x)$ contiene un subproducto de los ideales primos minimales sobre I.

Teorema 3.35. Sean $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, e I un ideal n-absorbente de R tal que $I\subsetneq\sqrt{I}$ y $\operatorname{Min}_R(I)=\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n\}$, $\mathfrak{p}_i\neq\mathfrak{p}_j$ si $i\neq j$. Supongamos además que $x\in\sqrt{I}\setminus I$ y m es el menor natural tal que $x^m\in I$. Si $X\subset\operatorname{Min}_R(I)$ es tal que $|X|=n-m+1$ entonces $\displaystyle\prod_{\mathfrak{p}\in X}\mathfrak{p}\subset\left(I:_R x^{m-1}\right)$.

Demostración. Observe primero que $m\leq n$, así que $n-m+1\geq 1$. Si $Y=\operatorname{Min}_R(I)\setminus X$ entonces $|Y|=m-1$. Como $x\in\sqrt{I}=\displaystyle\bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Min}_R(I)}\mathfrak{p}$, en particular tenemos que $x\in\mathfrak{q}$ para todo $\mathfrak{q}\in X$, de donde

$$x^{m-1}\in\prod_{\mathfrak{q}\in Y}\mathfrak{q}. \tag{3.7}$$

Note ahora que $\left(\prod_{\mathfrak{q}\in Y}\mathfrak{q}\right)\left(\prod_{\mathfrak{p}\in X}\mathfrak{p}\right)=\prod_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}_R(I)}\mathfrak{p}$, así que por el teorema 3.23 se tiene que $\left(\prod_{\mathfrak{q}\in Y}\mathfrak{q}\right)\left(\prod_{\mathfrak{p}\in X}\mathfrak{p}\right)\subset I$, así que de (3.7) se sigue que $x^{m-1}\prod_{\mathfrak{p}\in X}\mathfrak{p}\in I$, luego $\prod_{\mathfrak{p}\in X}\mathfrak{p}\subset\left(I:_R x^{m-1}\right)$. □

Teorema 3.36. Sean $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, I un ideal n-absorbente de R tal que $I\subsetneq\sqrt{I}$ y $\mathrm{Min}_R(I)=\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n\}$, $|\mathrm{Min}_R(I)|=n$. Si $x\in\sqrt{I}\setminus I$ y $E\subset\mathrm{Min}_R(I)$ es tal que $|E|=n-1$ entonces $\prod_{\mathfrak{p}\in E}\mathfrak{p}\subset(I:_R x)$.

Demostración. Sea $\mathfrak{q}$ el único primo tal que $\mathfrak{p}\in\mathrm{Min}_R(I)\setminus E$, tal elemento existe pues $|E|=n-1$. Como en el teorema anterior, dado que $x\in\sqrt{I}$, se tiene que $x\in\mathfrak{q}$, también por el teorema 3.23, $\mathfrak{q}\prod_{\mathfrak{p}\in E}\mathfrak{p}\subset I$, de donde $x\prod_{\mathfrak{p}\in E}\mathfrak{p}\subset I$; es decir $\prod_{\mathfrak{p}\in E}\mathfrak{p}\subset(I:_R x)$. □

Con el siguiente resultado se dan por teminadas las propiedades más básicas de los ideales n-absorbentes.

Teorema 3.37. Sea I un ideal $\mathfrak{p}$-primario de un anillo R tal que $\mathfrak{p}^n\subset I$ para algún $n\in\mathbb{N}$ y sea $x\in\mathfrak{p}\setminus I$. Si $x^m\notin I$ para algún $m\in\mathbb{N}$ entonces $(I:_R x^m)$ es un ideal $(n-m)$-absorbente de R.

Demostración. Notemos que $m<n$, pues en caso contrario $x^m\in I$, lo cual es una contradicción. Se sigue entonces que $n-m\geq 1$. Veamos que $(I:_R x^m)$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario.

1. $\sqrt{(I:_R x^m)}=\mathfrak{p}$.
   Como $I\subset(I:_R x^m)$ entonces $\mathfrak{p}=\sqrt{I}\subset\sqrt{(I:_R x^m)}$. Para la otra contención, sea $a\in\sqrt{(I:_R x^m)}$, entonces $a^l\in(I:_R x^m)$ para algún $l\in\mathbb{N}$, y así $a^l x^m\in I$. Dado que I es $\mathfrak{p}$-primario y $x^m\notin I$ entonces $a^l\in\sqrt{I}=\mathfrak{p}$ y al ser $\mathfrak{p}$ ideal primo se concluye que $a\in\mathfrak{p}$.

2. $(I:_R x^m)$ es primario.
   Sean $a,b\in R$ tales que $ab\in(I:_R x^m)$ pero $b\notin(I:_R x^m)$. Tenemos que
   $$a\,(bx^m)=(ab)x^m\in I. \tag{3.8}$$
   Dado que $b\notin(I:_R x^m)$ entonces $bx^m\notin I$ y como I es primario de (3.8) se tiene que $a\in\sqrt{I}=\mathfrak{p}=\sqrt{(I:_R x^m)}$

Mostraremos ahora que $\mathfrak{p}^{n-m} \subset (I :_R x^m)$. Dados $a_1, \ldots, a_{n-m} \in \mathfrak{p}$ se tiene que $a_1 \cdots a_{n-m} \in \mathfrak{p}^{n-m}$ y por tanto $x^m a_1 \cdots a_{n-m} \in \mathfrak{p}^n \subset I$, de donde $\mathfrak{p}^{n-m} \subset (I :_R x^m)$.
Por último, dado que $(I :_R x^m)$ es $\mathfrak{p}$-primario y $\mathfrak{p}^{n-m} \subset (I :_R x^m)$, por el teorema 3.26 se concluye que $(I :_R x^m)$ es $(n-m)$-absorbente. $\square$

Nótese que el ideal I del teorema anterior es n-absorbente por el teorema 3.26.

En esta sección se mostró que las propiedades $x^2 \in I$ para todo $x \in \sqrt{I}$ y $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset I$, donde $\mathrm{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$ y $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$, que poseen los ideales 2-absorbentes, se generalizan para ideales n-absorbentes, donde $n > 2$. En el capítulo 2 se mostró que si I es un ideal 2-absorbente que no es radical entonces $\omega\left(I :_R x\right) < \omega(I)$ para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$, para un ideal n-absorbente I, donde $n > 2$, esta desigualdad no necesariamente es estricta si $x \in R \setminus I$, sin embargo, se mostraron ejemplos de ideales n-absorbentes, no radicales, en los cuales la desigualdad es estricta para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$. Otras propiedades que tienen los ideales 2-absorbentes es que contienen al cuadrado de su radical y que, cuando contienen al producto de tres ideales, continen a algún producto de dos de dichos ideales, la propiedades análogas para ideales n-absorbentes serán estudiadas en la sección 4.1 del capítulo 4.

3.2. Extensión de ideales n-absorbentes

En la sección 3.1 se estudió la estabilidad de los ideales n-absorbentes bajo localizaciones y morfismos de anillos. En esta sección se estudiará el comportamiento de los ideales n-absorbentes bajo ciertas construcciones de anillos a partir de otros. Comenzamos con el producto directo de un número finito de anillos. Recordemos que los idelaes del anillo $R_1 \times R_2$ tienen la forma $I_1 \times I_2$, donde I_j es ideal de R_j.

Teorema 3.38. Si I_1 es un ideal n_1-absorbente de R_1 e I_2 es un ideal n_2-absorbente de R_2 entonces $I_1 \times I_2$ es un ideal (n_1+n_2)-absorbente de $R_1 \times R_2$; además $\omega_{R_1 \times R_2}\left(I_1 \times I_2\right) = \omega_{R_1}\left(I_1\right) + \omega_{R_2}\left(I_2\right)$.

Demostración. Sea $N = n_1 + n_2 + 1$ y supongamos que $(a_1, b_1) \cdots (a_N, b_N) \in I_1 \times I_2$, donde $(a_j, b_j) \in R_1 \times R_2$. Tenemos entonces que $a_1 \cdots a_N \in I_1$ y $b_1 \cdots b_N \in I_2$. Dado que I_1 es n_1-absorbente, reagrupando de ser necesaro, podemos suponer que $a_1 \cdots a_{n_1}$, y como I_2 es n_2-absorbente se tiene que $b_{j_1} \cdots b_{j_{n_2}} \in I_2$. De esta manera $\left(a_i, b_i\right), \left(a_{j_l}, b_{j_l}\right) \in I_1 \times I_2$ para todos $i = 1, \ldots, n_1$ y $l = 1, \ldots, n_2$. Si

$$X = \left\{\left(a_i, b_i\right), \left(a_{j_l}, b_{j_l}\right) : i = 1, \ldots, n_2, l = 1, \ldots, n_2\right\}$$

entonces $|X| \leq n_1 + n_2$, $\prod\limits_{(a_k,b_k)\in X} (a_k, b_k) \in I_1 \times I_2$ y terminamos.
Supongamos ahora que $1 \leq \omega_{R_1}(I_1) = n_1 < \infty$ y $1 \leq \omega_{R_2}(I_2) = n_2 < \infty$. Lo anterior muestra que $\omega_{R_1\times R_2}(I_1 \times I_2) \leq n_1 + n_2 = \omega_{R_1}(I_1) + \omega_{R_2}(I_2)$. Existen además $x_1, \ldots, x_{n_1} \in R_1$, $y_1, \ldots, y_{n_2} \in R_2$ tales que $x_1 \cdots x_{n_1} \in I_1$, $y_1 \cdots y_{n_2} \in I_2$ pero ningún subproducto propio de los $x_i's$ pertenece a I_1 y ningún subproducto propio de los $y_j's$ pertenece a I_2, de esta manera $(x_1, 1), \ldots, (x_{n_1}, 1), (1, y_1), \ldots, (1, y_{n_2})$ son $n_1 + n_2$ elementos de $R_1 \times R_2$ tales que

$$(x_1, 1) \cdots (x_{n_1}, 1)(1, y_1) \cdots (1, y_{n_2}) \in I_1 \times I_2$$

pero ningún subproducto propio pertenece a $I_1 \times I_2$, lo que muestra que $\omega_{R_1\times R_2}(I_1 \times I_2) \geq n_1 + n_2 = \omega_{R_1}(I_1) + \omega_{R_2}(I_2)$.
De la prueba anterior se tiene que si $\omega_{R_1}(I_1), \omega_{R_2}(I_2) < \infty$ entonces

$$\omega_{R_1\times R_2}(I_1 \times I_2) < \infty$$

equivalentemente, si $\omega_{R_1\times R_2}(I_1 \times I_2) = \infty$ entonces $\omega_{R_1}(I_1) = \infty$ o bien $\omega_{R_2}(I_2) = \infty$.
Supongamos ahora que $\omega_{R_1}(I_1) = \infty$ y que $I_1 \times I_2$ es m-absorbente para algún $m \in \mathbb{N}$. Como I_1 no es m-absorbente, existen $a_1, \ldots, a_{m+1} \in R_1$ tales que $a_1 \cdots a_{m+1} \in I_1$ pero ningún subproducto propio pertenece a I_1, de esta manera $(a_1, 0), \ldots, (a_{m+1}, 0) \in R_1 \times R_2$ son tales que

$$(a_1 \cdots a_{m+1}, 0) = (a_1, 0) \cdots (a_{m+1}, 0) \in I_1 \times I_2$$

pero ningún subproducto propio pertenece a $I_1 \times I_2$; es decir, $I_1 \times I_2$ no es m-absorbente, lo cual es una contradicción. Se sigue que $\omega_{R_1\times R_2}(I_1 \times I_2) = \infty$. De manera análoga, si $\omega_{R_2}(I_2) = \infty$ entonces $\omega_{R_1\times R_2}(I_1 \times I_2) = \infty$. $\square$

Una consecuencia inmediata del resultado anterior se enuncia a continuación.

Corolario 3.39. Sean $R_1, \ldots, R_m$ anillos y para cada $j = 1, \ldots, m$, sea I_j un ideal de R_j. Si $R = R_1 \times \cdots \times R_m$ entonces $\omega_R(I_1 \times \cdots \times I_m) = \omega_{R_1}(I_1) + \cdots + \omega_{R_m}(I_m)$.

Corolario 3.40. Sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales de R tales que $I_j + I_l = (1)$ siempre que $j \neq l$. Se tiene que

$$\omega_R(I_1 \cap \cdots \cap I_n) = \omega_R(I_1 \cdots I_n) = \omega_R(I_1) + \cdots + \omega_R(I_n).$$

En particular, si $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k \in \mathrm{Max}(R)$ son todos distintos entonces

$$\omega_R\left(\mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_k^{n_k}\right) = \omega_R\left(\mathfrak{m}_1^{n_1}\right) + \cdots + \omega_R\left(\mathfrak{m}_k^{n_k}\right),$$

donde $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Argumentando inductivamente es suficiente mostrar el caso $n = 2$. Sean I, J ideales de R tales que $I + J = (1)$. Por el corolario 1.24 se tiene que $R/IJ \cong R/I \times R/J$ y entonces

$$\begin{aligned} \omega_R(IJ) &= \omega_{R/IJ}(0) = \omega_{R/I\times R/J}(0 \times 0) \\ &= \omega_{R/I}(0) + \omega_{R/J}(0) = \omega_R(I) + \omega_R(J). \end{aligned}$$

Para terminar, sólo hace falta observar que $\omega_R(IJ) = \omega_R(I \cap J)$ pues $IJ = I \cap J$. $\square$

Los resultados del siguiente lema serán utilizados en la prueba del corolario 3.42, antes de enunciarlos daremos la notación que estos utilizan.

Sea R un dominio de Krull con campo de cocientes K y sea

$$X^{(1)}R := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1\}.$$

Recuérdese que $\{R_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in X^{(1)}R}$ es la menor familia de dominios de valuación discreta que definen a R (véase [14, teorema 12.3, p.87]); es decir

a) $R = \displaystyle\bigcap_{\mathfrak{p}\in X^{(1)}R} R_\mathfrak{p}$.

b) Para cada $a \in R$, $a \neq 0$, existe una cantidad finita de $R_\mathfrak{p}$ tales que a no es unidad en $R_\mathfrak{p}$.

Observe que si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X^{(1)}R$ son distintos entonces son incomparables.

Lema 3.41.

1. Sea R un dominio de Krull.
   a) [14, teorema 12.1, p.86] Si $S \subset R$ es un sistema multiplicativo entonces $S^{-1}R$ es también un dominio de Krull.
   b) [11, teorema 43.16, p.536] R es dominio de Dedekind si y solo si $\dim(R) = 1$.
2. [9, corolario 5.7, p.26] Sea R un dominio de Krull. Si J es un ideal fraccionario de R entonces $\left(J^{-1}\right)^{-1} = \displaystyle\bigcap_{\mathfrak{p}\in X^{(1)}R} \mathfrak{p}^{(n_\mathfrak{p})}$, donde $n_\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}$ es tal que $J_\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_\mathfrak{p})^{n_\mathfrak{p}}$.
3. [9, corolario 13.4, p.58] Si R es un dominio de Dedekind tal que el conjunto $X^{(1)}R$ es finito entonces R es un dominio de ideales principales.

Si J es un ideal entero del dominio de Krull R y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ entonces $J_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^{n_{\mathfrak{p}}}$ para algún $n_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y así $\mathfrak{p}^{(n_{\mathfrak{p}})}$ es un ideal entero de R y por 2 del lema anterior se tiene que $\left(J^{-1}\right)^{-1}$ es ideal entero de R.

Corolario 3.42. Sean R un dominio de Krull y $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in X^{(1)}R$. Si $P = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ entonces $I = \left(P^{-1}\right)^{-1}$ es ideal n-absorbente de R. Más aún $\omega(I) = n$.

Demostración. Por el comentario previo ya tenemos que I es ideal de R. Escribamos $P = \mathfrak{q}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{q}_k^{n_k}$, donde $\mathfrak{q}_j \in X^{(1)}R$ son tales que $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_j$ si $i \neq j$ y $n_1 + \cdots + n_k = n$. Por el inciso 2 del lema anterior

$$I = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X^{(1)}R} \mathfrak{p}^{(n_{\mathfrak{p}})}. \tag{3.9}$$

Dado $\mathfrak{p} \in X^{(1)}R$ se tienen dos casos:

- Caso 1. $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}_j$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Como $\mathfrak{q}_j$ y $\mathfrak{p}$ son incomparables entonces $\mathfrak{q}_j^{n_j} \nsubseteq \mathfrak{p}$ y así $\mathfrak{q}_j^{n_j} \cdots \mathfrak{q}_k^{n_k} \nsubseteq \mathfrak{p}$, con esto

  $$P_{\mathfrak{p}} = \left(\mathfrak{q}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{q}_k^{n_k}\right)_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^0,$$

  de donde $n_{\mathfrak{p}} = 0$ y por tanto $\mathfrak{p}^{(n_{\mathfrak{p}})} = \mathfrak{p}^{(0)} = \left(\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}^0\right) \cap R = R$.

- Caso 2. $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$. Dado que $\mathfrak{q}_j \nsubseteq \mathfrak{q}_i$ para todo $j \neq i$ se tiene que $\mathfrak{q}_j^{n_j} \nsubseteq \mathfrak{q}_i$ y así $\left(\mathfrak{q}_j^{n_j}\right)_{\mathfrak{q}_i} = R_{\mathfrak{q}_i}$. De esta manera

  $$\begin{aligned} P_{\mathfrak{p}} &= \left(\mathfrak{q}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{q}_i^{n_i} \cdots \mathfrak{q}_k^{n_k}\right)_{\mathfrak{q}_i} \\ &= \left(\mathfrak{q}_1^{n_1}\right)_{\mathfrak{q}_i} \cdots \left(\mathfrak{q}_i^{n_i}\right)_{\mathfrak{q}_i} \cdots \left(\mathfrak{q}_k^{n_k}\right)_{\mathfrak{q}_i} \\ &= R_{\mathfrak{q}_i} \cdots \left((\mathfrak{q}_i)_{\mathfrak{q}_i}\right)^{n_i} \cdots R_{\mathfrak{q}_i} \\ &= \left((\mathfrak{q}_i)_{\mathfrak{q}_i}\right)^{n_i} \\ &= (\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}})^{n_i}. \end{aligned}$$

  Con esto $n_{\mathfrak{p}} = n_i$ y $\mathfrak{p}^{(n_{\mathfrak{p}})} = \mathfrak{q}_i^{(n_i)}$

Por todo lo anterior la ecuación (3.9) queda

$$I = \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{q}_i^{(n_i)}\right) \cap \left(\bigcap_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}_i} R\right) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{q}_i^{(n_i)}.$$

Del corolario 3.19 se tiene que $\mathfrak{q}_i^{(n_i)}$ es n_i-absorbente y por el inciso 3 del teorema 3.3 se tiene que I es ideal n-absorbente de R.
Mostremos ahora que $\omega(I) = n$; de la primera parte de la demostración ya tenemos que $\omega(I) \leq n$, por lo que sólo hace falta ver que $n \leq \omega(I)$. Sea $S = R \setminus (\mathfrak{q}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{q}_k)$. Es claro que S es un sistema multiplicativo así que por el inciso 1 a) del lema anterior $S^{-1}R$ es un dominio de Krull. Ya que los ideales primos $\mathfrak{q}_j$ son incomparables, como en la demostración del corolario 3.19, los ideales maximales de $S^{-1}R$ son precisamente $S^{-1}\mathfrak{q}_1, \ldots, S^{-1}\mathfrak{q}_k$, de donde $S^{-1}\mathfrak{q}_j^{n_j} = \left(S^{-1}\mathfrak{q}_j\right)^{n_j}$ es ideal n_j-absorbente de $S^{-1}R$ por el lema 3.16. Ahora bien

$$
\begin{aligned}
S^{-1}I &= S^{-1}\left(\mathfrak{q}_1^{(n_1)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k^{(n_k)}\right) \\
&= \left(S^{-1}\mathfrak{q}_1^{(n_1)}\right) \cap \cdots \cap \left(S^{-1}\mathfrak{q}_k^{(n_k)}\right) \\
&= \left(S^{-1}\mathfrak{q}_1^{n_1}\right) \cap \cdots \cap \left(S^{-1}\mathfrak{q}_k^{n_k}\right) \\
&= \left(S^{-1}\mathfrak{q}_1^{n_1}\right) \cdots \left(S^{-1}\mathfrak{q}_k^{n_k}\right)
\end{aligned}
$$

la última igualdad es porque, por el corolario 1.12, $S^{-1}\mathfrak{q}_i^{n_i} + S^{-1}\mathfrak{q}_j^{n_j} = S^{-1}R$ para todo $i \neq j$. Tenemos las siguientes afirmaciones:
Afirmación 1. $\operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right) \setminus \{0\} = \left\{S^{-1}\mathfrak{q}_1, \ldots, S^{-1}\mathfrak{q}_k\right\}$.
Una contención es clara. Por otro lado si $0 \neq \overline{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right)$ entonces $\overline{\mathfrak{p}} = S^{-1}\mathfrak{p}$ para algún $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ tal que $\mathfrak{p} \neq 0$ y $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{q}_k$, así que por el teorema de evasión de primos se tiene que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_j$ para algún j, de donde $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_j$ pues $\mathfrak{q}_j$ es de altura 1 y por tanto $\overline{\mathfrak{p}} = S^{-1}\mathfrak{q}_j$.

Dado que todo ideal primo no nulo de $S^{-1}R$ es maximal se tiene que $\dim\left(S^{-1}R\right) = 1$ y como $S^{-1}R$ es dominio de Krull, por el inciso 1 b) del lema anterior se tiene que $S^{-1}R$ es dominio de Dedekind.
Afirmación 2. $\operatorname{ht}\left(S^{-1}\mathfrak{q}_j\right) = 1$ para todo $j = 1, \ldots, k$.
Si $\overline{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right) \setminus \{0\}$ es tal que $\overline{\mathfrak{p}} \subset S^{-1}\mathfrak{q}_j$ entonces $\overline{\mathfrak{p}} = S^{-1}\mathfrak{q}_i$ para algún i y $S^{-1}\mathfrak{q}_i \subset S^{-1}\mathfrak{q}_j$. De la maximalidad de $S^{-1}\mathfrak{q}_i$ se sigue que $\overline{\mathfrak{p}} = S^{-1}\mathfrak{q}_i = S^{-1}\mathfrak{q}_j$, de donde $\operatorname{ht}\left(S^{-1}\mathfrak{q}_j\right) = 1$.
Afirmación 3. $X^{(1)}\left(S^{-1}R\right) = \left\{S^{-1}\mathfrak{q}_1, \ldots, S^{-1}\mathfrak{q}_k\right\}$.
Ya tenemos una contención por la afirmación 2. Por otro lado, si $\overline{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right)$ es tal que $\operatorname{ht}(\overline{\mathfrak{p}}) = 1$ entonces $\overline{\mathfrak{p}} \neq 0$ así que por la afirmación 1. se tiene que $\overline{\mathfrak{p}} = S^{-1}\mathfrak{q}_j$ para algún j.

De las afirmaciones 2 y 3 tenemos que $X^{(1)}\left(S^{-1}R\right)$ es finito, por el inciso 3 del lema anterior se sigue que $S^{-1}R$ es dominio de ideales principales. De esta manera $S^{-1}\mathfrak{q}_j^{n_j+1} \subsetneq S^{-1}\mathfrak{q}_j^{n_j}$ y por la segunda parte del lema 3.16 se tiene que $\omega_{S^{-1}R}\left(S^{-1}\mathfrak{q}_j^{n_j}\right) = n_j$. Concluimos por el corolario anterior que

$$\omega_{S^{-1}R}\left(S^{-1}I\right) = \omega_{S^{-1}R}\left(\left(S^{-1}\mathfrak{q}_1^{n_1}\right)\cdots\left(S^{-1}\mathfrak{q}_k^{n_k}\right)\right) = n_1 + \cdots + n_k = n.$$

Para terminar, el teorema 3.7 implica que $n = \omega_{S^{-1}R}\left(S^{-1}I\right) \leq \omega_R(I) = \omega(I)$. $\square$

El corolario 3.40 dice que $\omega(IJ) = \omega(I) + \omega(J)$ si I, J son ideales primos entre si. El ejemplo 6 muestra que, aunque I, J sean ideales primos de R puede darse que $\omega(IJ) > \omega(I) + \omega(J)$. Un ejemplo en el que se dé la otra desigualdad estricta es cuando $I = J$ es un ideal primo idempotente pues en tal caso $\omega(IJ) = \omega\left(I^2\right) = \omega(I) = 1 < 2 = \omega(I) + \omega(J)$.

Recordemos que

$$\operatorname{Spec}(R_1 \times R_2) = \{\mathfrak{p} \times R_2, R_1 \times \mathfrak{q} : \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R_1), \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R_2)\}.$$

Es claro que si $P \in \operatorname{Spec}(R_1 \times R_2)$ entonces $\omega_{R_1 \times R_2}(P) = 1$ y recíprocamente, del teorema 3.38 se tiene que si el ideal $I_1 \times I_2$ de $R_1 \times R_2$ es tal que $\omega_{R_1 \times R_2}(I_1 \times I_2) = 1$ entones $\omega_{R_1}(I_1) = 0$ o $\omega_{R_2}(I_2) = 0$, es decir, $I_1 = R_1$ o $I_2 = R_2$ de donde $I_1 \times I_2 \in \operatorname{Spec}(R_1 \times R_2)$, así que el teorema 3.38 generaliza este hecho.

Si R es un anillo y M es un R-módulo se puede construir un nuevo anillo a partir de R y M, denotado por $R(+)M$ y conocido como la *idealización de M y R*. Como conjunto, se define $R(+)M := R \times M$, y para $(a, m), (b, n) \in R(+)M$ se definen las siguientes operaciones

- Suma: $(a, m) + (b, n) = (a + b, m + n)$.
- Producto: $(a, m)(b, n) = (ab, an + bm)$.

Es claro que $(a, m) + (b, n), (a, m)(b, n) \in R(+)M$. Estas operaciones dan estructura de anillo conmutativo a $R(+)M$ con elemento unitario $(1, 0_M)$ y neutro aditivo $(0_R, 0_M)$. En la siguiente proposición se mencionan algunas propiedades de $R(+)M$. Debido a la sencillez de sus pruebas, estas son omitidas.

Proposición 3.43. Sean R un anillo y M un R-módulo.

1. Si $(a_1, m_1), \ldots, (a_l, m_l) \in R(+)M$ entonces

$$\prod_{i=1}^{l}(a_i, m_i) = \left(a_1 \cdots a_l, \sum_{i=1}^{l} a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_l m_i\right)$$

En particular $(a, m)^k = \left(a^k, ka^{k-1}m\right)$.

2. Si I es un ideal de R entonces $I(+)M$ es un ideal de $R(+)M$.

3. Si N es un submódulo de M entonces $0(+)N$ es ideal de $R(+)M$.

4. Si N_1, N_2 son submódulos de M tales que $N_1 \subset N_2$ entonces $0(+)N_1$ y $0(+)N_2$ son ideales de $R(+)M$ tales que $0(+)N_1 \subset 0(+)N_2$.

5. Si N es un submódulo de M y J es un ideal de R tal que $J \subset (N :_R M)$ entonces $J(+)N$ es ideal de $R(+)M$.

6. $(0(+)M)^2 = 0$. De esta manera $(0(+)M)^2 \subset I$ para todo ideal I de $R(+)M$.

El siguiente lema estudia la absorbencia de los ideales de $R(+)M$ cuando se tiene un ideal n-absorbente de R.

Lema 3.44. Sean R un anillo y M un R-módulo. Si I es un ideal n-absorbente de R entonces $I(+)M$ es ideal n-absorbente de $R(+)M$, además

$$\omega_{R(+)M}(I(+)M) = \omega_R(I).$$

Demostración. Sean $(a_1, m_1), \ldots, (a_{n+1}, m_{n+1}) \in R(+)M$ tales que

$$\left(a_1 \cdots a_{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_{n+1} m_i\right) = \prod_{i=1}^{n+1} (a_i, m_i) \in I(+)M.$$

Se tiene entonces que $a_1 \cdots a_{n+1} \in I$, como I es n-absorbente, sin perder generalidad, podemos suponer que $a_1 \cdots a_n \in I$, pero así

$$\left(a_1 \cdots a_n, \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n m_i\right) \in I(+)M,$$

de donde $I(+)M$ es n-absorbente. Se sigue que $\omega_{R(+)M}(I(+)M) \leq \omega_R(I)$. Supongamos ahora que $\omega_R(I) = n$. Existen entonces $x_1, \ldots, x_n \in R$ tales que $x_1 \cdots x_n \in I$ pero ningún subproducto propio de los $x_j's$ pertenece a I, de esta manera $(x_1, 0), \ldots, (x_n, 0) \in R(+)M$ son tales que

$$(x_1 \cdots x_n, 0) = (x_1, 0) \cdots (x_n, 0) \in I(+)M$$

pero ningún subproducto propio pertenece a $I(+)M$, lo cual muestra que $\omega_{R(+)M}(I(+)M) \geq n = \omega_R(I)$. $\square$

Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.45. Sean D un dominio entero, $R = D(+)D$ e I un ideal de D tal que $\omega_D(I) = n$. Se tiene que $0(+)I$ es un ideal $(n+1)$-absorbente de R. Mas aún, $\omega_R\left(0(+)I\right) = \omega_D(I) + 1$.
En particular, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(D)$ entonces $0(+)\mathfrak{p}$ es ideal 2-absorbente de R.

Demostración. Veamos primero que $0(+)I$ es ideal $(n+1)$-absorbente de R, para ello, supongamos que $c_1 = (a_1, m_1), \ldots, c_{n+2} = (a_{n+2}, m_{n+2}) \in R$ son tales que

$$\left(a_1 \cdots a_{n+1}, \sum_{i=1}^{n+2} a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_{n+1} m_i\right) = c_1 \cdots c_{n+2} \in 0(+)I,$$

de donde se tienen las siguientes relaciones

$$a_1 \cdots a_{n+2} = 0, \tag{3.10}$$

$$\sum_{i=1}^{n+2} a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_{n+2} m_i \in I. \tag{3.11}$$

Como D es dominio entero, de (3.10), algún $a_j = 0$, digamos $a_{n+2} = 0$, así que de (3.11) se sigue que $a_1 \cdots a_n\left(a_{n+1} m_{n+2}\right) = a_1 \cdots a_{n+1} m_{n+2} \in I$, y como I es ideal n-absorbente de D se tienen, en general, dos casos, a saber $a_2 \cdots a_n\left(a_{n+1} m_{n+2}\right) \in I$ o bien $a_1 \cdots a_n \in I$. Si $a_2 \cdots a_n a_n m_{n+2} \in I$ entonces

$$\begin{aligned}
c_2 \cdots c_{n+1} c_{n+2} &= (a_2, m_2) \cdots (a_{n+1}, m_{n+1})(a_{n+2}, m_{n+2}) \\
&= (a_2, m_2) \cdots (a_{n+1}, m_{n+1})(0, m_{n+2}) \\
&= \left(a_2 \cdots a_{n+1}, \sum_{i=2}^{n+1} a_2 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_{n+1} m_i\right)(0, m_{n+2}) \\
&= (0, a_2 \cdots a_{n+1} m_{n+2}) \in 0(+)I.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $a_1 \cdots a_n \in I$ entonces $a_1 \cdots a_n m_{n+2} \in I$

$$\begin{aligned}
c_1 \cdots c_n c_{n+2} &= (a_1, m_1) \cdots (a_n, m_n)(a_{n+2}, m_{n+2}) \\
&= \left(a_1 \cdots a_n, \sum_{i=1}^{n} a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n m_i\right)(0, m_{n+2}) \\
&= (0, a_1 \cdots a_n m_{n+2}) \in 0(+)I,
\end{aligned}$$

por lo que $0(+)I$ es ideal $(n+1)$-absorbente de R.
Mostraremos ahora que $0(+)I$ no es ideal n-absorbente de R. Dado que

I no es ideal $(n-1)$-absorbente de D, existen $d_1, \ldots, d_n \in D$ tales que $d_1 \cdots d_n \in I$ pero ningún subproducto propio pertenece a I, nótese además que esto implica que $d_j \neq 0$ para todo j, pues si $d_j = 0$ para algún j entonces, para todo $i \in \mathbb{N}_n \setminus \{j\}$ se tendría que $\prod\limits_{l \neq i} d_l = 0 \in I$ lo cual es imposible. De esta manera $x_1 = (d_1, 0), \ldots, x_n = (d_n, 0), x_{n+1} = (0,1) \in D(+)D = R$ son tales que

$$\begin{aligned} x_1 \cdots x_n x_{n+1} &= (d_1, 0) \cdots (d_n, 0)(0,1) \\ &= (d_1 \cdots d_n, 0)(0,1) \\ &= (0, d_1 \cdots d_n) \in 0(+)I \end{aligned}$$

Sin embargo, es claro que $x_1 \cdots x_n = (d_1 \cdots d_n, 0) \notin 0(+)I$ y que, para todo $j = 1, \ldots, n$, $(x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n)\, x_{n+1} = \left(0, d_1 \cdots \widehat{d_j} \cdots d_n\right) \notin 0(+)I$, por lo que $0(+)I$ no es n-absorbente y por tanto $\omega_R(0(+)I) = n+1 = \omega_D(I) + 1$.
Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(D)$ entonces $\omega_D(\mathfrak{p}) = 1$, así que, por lo demostrado anteriormente, se tiene que $0(+)\mathfrak{p}$ es ideal 2-absorbente de R. □

El siguiente ejemplo ilustra el teorema anterior.

Ejemplo 9. Sea $R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$. Observe que, como $\mathbb{Z}$ es dominio entero, $0 \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ y, por el lema 3.44, $0(+)\mathbb{Z} \in \operatorname{Spec}(R)$.

1. Sea $I = p_1 \cdots p_n \mathbb{Z}$, donde $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$ son primos no necesariamente distintos. De 4 del teorema 3.3 se tiene que I es un ideal n-absorbente de $\mathbb{Z}$. Este ideal no es $(n-1)$-absorbente por la observación 5, de donde $\omega_{\mathbb{Z}}(I) = n$ y, del teorema 3.45, $\omega_R(0(+)I) = n+1$.

2. Sea I un ideal $\mathfrak{p}$-primario de un anillo T tal que $\mathfrak{p}^m \subset I$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Si I es un ideal n-absorbente de T que no es $(n-1)$-absorbente entonces, por el teorema 3.26, $\omega_T(I) = n \leq m$. Sin embargo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, por el inciso anterior, el ideal $I_n = 0(+)p_1 \cdots p_{n-1}\mathbb{Z}$ de R es tal que $\omega_R(I_n) = n$, además $\mathfrak{p} = \sqrt{I_n} = 0(+)\mathbb{Z} \in \operatorname{Spec}(R)$ y $\mathfrak{p}^2 \subset I_n$, de donde I_n no es $\mathfrak{p}$-primario si $n \geq 3$.

El siguiente ejemplo, además de ilustrar el teorema 3.45, muestra que la desigualdad del teorema 3.31 puede ser estricta para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$.

Ejemplo 10. Sea $R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$. Como en el ejemplo anterior se tiene que $0(+)\mathbb{Z} \in \operatorname{Spec}(R)$.

1. Si $p \in \mathbb{Z}$ es un primo positivo entonces $p\mathbb{Z}$ es ideal primo de $\mathbb{Z}$. Sea $J = 0(+)p\mathbb{Z}$. Observe que $\sqrt{J} = 0(+)\mathbb{Z}$ por lo que J no es radical. Sea $x \in \sqrt{J} \setminus J$. Vamos a mostrar que $(J :_R x) = (p\mathbb{Z})(+)\mathbb{Z}$. Note que $(p\mathbb{Z})(+)\mathbb{Z} \in \operatorname{Spec}(R)$ por el lema 3.44. Supongamos que $x = (a, m)$. Dado que $x \in \sqrt{J}$ se tiene que $a = 0$ y, como $x \notin J$, $m \notin p\mathbb{Z}$. Sea $y = (b, n) \in (J :_R x)$. Se tiene entonces que $(0, bm) = xy \in J = 0(+)p\mathbb{Z}$, de donde $b \in p\mathbb{Z}$, por lo que $y = (b, n) \in (p\mathbb{Z})(+)\mathbb{Z}$. Para ver la otra contención, sea $y = (rp, n) \in (p\mathbb{Z})(+)\mathbb{Z}$. Se tiene entonces que $xy = (0, rpm) \in 0(+)p\mathbb{Z} = J$ y así $y \in (J :_R x)$. Con esto
$$\omega_R (J :_R x) = \omega_R ((p\mathbb{Z})(+)\mathbb{Z}) = 1 < 2 = \omega_R(J).$$

2. Si $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ son primos distintos, dado que $\mathbb{Z}$ es un DIP, $\omega_{\mathbb{Z}} (p_1p_2\mathbb{Z}) = 2$, así que por el teorema 3.45, $J = 0(+)p_1p_2\mathbb{Z}$ es un ideal de R tal que $\omega_R (0(+)p_1p_2\mathbb{Z}) = 3$. No es difícil verificar que $\sqrt{J} = 0(+)\mathbb{Z}$, por lo que J no es radical. Sea $x = (0, n) \in \sqrt{J} \setminus J$ y note que $n \notin p_1p_2\mathbb{Z}$. Para los casos: $n \in \mathbb{Z} \setminus (p_1\mathbb{Z} \cup p_2\mathbb{Z})$, $n \in p_2\mathbb{Z} \setminus\ p_1p_2\mathbb{Z}$ y $n \in p_1\mathbb{Z} \setminus\ p_1p_2\mathbb{Z}$, se tienen las siguientes afirmaciones, siendo las últimas dos análogas.

   a) Si $n \in \mathbb{Z} \setminus (p_1\mathbb{Z} \cup p_2\mathbb{Z})$ entonces $(J :_R x) = (p_1p_2\mathbb{Z})\,(+)\mathbb{Z}$.
   Dado $y = (a, b) \in (J :_R x)$ tenemos $(0, an) = (a, b)(0, n) = yx \in J = 0(+)p_1p_2\mathbb{Z}$, de donde $na \in p_1p_2\mathbb{Z} \subset p_1\mathbb{Z}$ y entonces $a \in p_1\mathbb{Z}$ pues $n \notin p_1\mathbb{Z}$. De manera análoga se tiene también que $a \in p_2\mathbb{Z}$. Dado que p_1, p_2 son distintos, se sigue que $a \in p_1p_2\mathbb{Z}$ y por tanto $y = (a, b) \in (p_1p_2\mathbb{Z})\,(+)\mathbb{Z}$. Recíprocamente, si $(p_1p_2r, b) \in (p_1p_2\mathbb{Z})\,(+)\mathbb{Z}$ entonces
   $$(p_1p_2r, b)\,x = (p_1p_2r, b)\,(0, n) = (0, p_1p_2rn) \in 0(+)p_1p_2\mathbb{Z} = J,$$
   de donde $(p_1p_2r, b) \in (J :_R x)$.

   b) Si $n \in p_2\mathbb{Z}\setminus p_1p_2\mathbb{Z}$ entonces $(J :_R x) = (p_1\mathbb{Z})\,(+)\mathbb{Z}$. Si $y = (a, b) \in (J :_R x)$ entonces $(0, an) = yx \in J = 0(+)p_1p_2\mathbb{Z}$ y así $an \in p_1p_2\mathbb{Z} \subset p_1\mathbb{Z}$, de donde $a \in p_1\mathbb{Z}$ pues $n \notin p_1p_2\mathbb{Z}$. De esta manera $y = (a, b) \in (p_1\mathbb{Z})\,(+)\mathbb{Z}$. Para ver la otra contención sea $(p_1r, b) \in (p_1\mathbb{Z})\,(+)\mathbb{Z}$. Se tiene entonces que $(p_1r, b)\,x = (p_1r, b)\,(0, n) = (0, p_1rn) \subset 0(+)p_1p_2\mathbb{Z}$ pues $n \in p_2\mathbb{Z}$.

   c) Si $n \in p_1\mathbb{Z} \setminus p_1p_2\mathbb{Z}$ entonces $(J :_R x) = (p_2\mathbb{Z})\,(+)\mathbb{Z}$.

   Observe que estos ideales no están ordenados linealmente.
   Antes de terminar haremos una última observación. Por la proposición 2.3, o bien, por la observación 5, se tiene que $\omega_{\mathbb{Z}} (p_1p_2\mathbb{Z}) = 2$, además

$\omega_{\mathbb{Z}}(p_1\mathbb{Z}) = \omega_{\mathbb{Z}}(p_2\mathbb{Z}) = 1$, así que usando el lema 3.44 tenemos que para todo $x \in \sqrt{J} \setminus J$, $\omega_R(J :_R x) = 2$, o bien, $\omega_R(J :_R x) = 1$, mientras que $\omega_R(J) = 3$, es decir, $\omega_R(J :_R x) < \omega_R(J)$ para todo $x \in \sqrt{J} \setminus J$.

Los teoremas 2.13 y 2.15 dicen que si I es un ideal 2-absorbente de anillo R que no es radical entonces $(I :_R x) \in \operatorname{Spec}(R)$ para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$ y además $\{(I :_R x)\}_{x \in \sqrt{I} \setminus I}$ es un conjunto totalmente ordenado, sin embargo, el ejemplo anterior muestra que esto no es necesariamente cierto si I es un ideal n-absorbente de R y $n \geq 3$.

Sean T una extensión del dominio entero D y $R = D(+)T$. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(D)$, no necesariamente es cierto que $0(+)\mathfrak{p}$ es un ideal 2-absorbente de R. Tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11. Si $R = \mathbb{Z}(+)\mathbb{Q}$ entonces $I = 0(+)2\mathbb{Z}$ es un ideal de R con $\omega_R(I) = \infty$.

Demostración. I es ideal de R por el inciso 3 de la proposición 3.43. Observe que $I \notin \operatorname{Spec}(R)$ pues $(0,1)^2 = (0,0) \in I$ pero $(0,1) \notin I$. Supongamos que I es m-absorbente para algún $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Para cada $i = 1, \ldots, m$, sea $x_i = (2,0)$ y $x_{m+1} = \left(0, \frac{1}{2^{m-1}}\right)$ entonces

$$\begin{aligned} x_1 \cdots x_{m+1} &= (2,0)^m \left(0, \frac{1}{2^{m-1}}\right) \\ &= (2^m, 0) \left(0, \frac{1}{2^{m-1}}\right) \\ &= (0,2) \in I \end{aligned}$$

pero $x_1 \cdots x_m = (2^m, 0) \notin I$ y $x_2 \cdots x_{m+1} = (2^{m-1}, 0)\left(0, \frac{1}{2^{m-1}}\right) = (0,1) \notin I$, de donde I no es m-absorbente. Esto muestra que $\omega_R(I) = \infty$. En particular I no es 2-absorbente, aunque $2\mathbb{Z}$ es ideal primo de $\mathbb{Z}$. □

Consideraremos ahora extensiones de ideales n-absorbentes en el anillo de polinomios $R[x]$.

Teorema 3.46. Sea I un ideal R. Se tiene que (I, x) es ideal n-absorbente de $R[x]$ si y solo si I es ideal n-absorbente de R, además $\omega_{R[x]}((I,x)) = \omega_R(I)$.

Demostración. Por 2 del corolario 3.9 se tiene que (I, x) es ideal n-absorbente de $R[x]$ si y solo si $(I,x)/xR[x]$ es ideal n-absorbente de $R[x]/xR[x]$; es decir si y solo si I es ideal n-absorbente de R. De esta manera

$$\omega_{R[x]}((I,x)) = \omega_{R[x]/xR[x]}((I,x)/xR[x]) = \omega_R(I).$$

□

Para un ideal I de R se define

$$I[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x] : n \in \mathbb{N}, a_j \in I\}.$$

No es difícil verificar que, bajo el morfismo natural de anillos $\psi : R \longrightarrow R[x]$, $I[x] = I^e$, donde I^e es el ideal generado por $\psi(I)$ en $R[x]$. Si se define ahora la función

$$\varphi : R[x] \longrightarrow (R/I)[x]$$

mediante $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mapsto (a_0 + I) + (a_1 + I)x + \cdots + (a_n + I)x^n$, se tiene que φ es un epimorfismo de anillos con $\ker\varphi = I[x]$, de donde $R[x]/I[x] \cong (R/I)[x]$. Se sigue que $I[x] \in \mathrm{Spec}(R[x])$ si y solo si $I \in \mathrm{Spec}(R)$.

El siguiente objetivo es mostrar la afirmación equivalente para ideales 2-absorbentes (teorema 3.52) y los lemas 3.48, 3.49, 3.50 y 3.51 permitirán alcanzar el objetivo. El siguiente lema hará uso de algunas propiedades de la extensión de un ideal. Aunque la extensión de un ideal satisface varias propiedades importantes e interesantes, usaremos específicamente un par de ellas, las cuales pueden encontrarse en la página 12 de [3].

Proposición 3.47. Sea $f : R \longrightarrow T$ un morfismo de anillos y sean I, J ideales de R. Se cumplen las siguientes relaciones

1. $(IJ)^e = I^eJ^e$.

2. $\left(\sqrt{I}\right)^e \subset \sqrt{I^e}$.

Lema 3.48. Sea I un ideal de R tal que $I \subsetneq \sqrt{I}$.

1. Si $\sqrt{I} = \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ entonces $\sqrt{I[x]} = \mathfrak{p}[x]$ y por tanto $\sqrt{I[x]} \in \mathrm{Spec}(R[x])$.

2. Si $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ y $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset I$, donde $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathrm{Min}_R(I)$ son distintos, entonces $\sqrt{I[x]} = \mathfrak{p}_1[x] \cap \mathfrak{p}_2[x]$ y $\mathfrak{p}_1[x]\mathfrak{p}_2[x] \subset I[x]$.

Demostración.

1. Dado que $I \subset \mathfrak{p}$ entonces $I[x] = I^e \subset \mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}[x]$. Por otro lado, como $\mathfrak{p}[x] = \mathfrak{p}^e$, por 2 de la proposición 3.47 se tiene

$$\mathfrak{p}[x] = \mathfrak{p}^e = \left(\sqrt{I}\right)^e \subset \sqrt{I^e} = \sqrt{I[x]}.$$

2. Observe primero que $\mathfrak{p}_1[x], \mathfrak{p}_2[x] \in \operatorname{Spec}(R[x])$ al ser $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec}(R)$. Como $I \subset \mathfrak{p}_1$ entonces $I[x] \subset \mathfrak{p}_1[x]$, de donde $\sqrt{I[x]} \subset \sqrt{\mathfrak{p}_1[x]} = \mathfrak{p}_1[x]$. De manera análoga $\sqrt{I[x]} \subset \mathfrak{p}_2[x]$, y por tanto $\sqrt{I[x]} \subset \mathfrak{p}_1[x] \cap \mathfrak{p}_2[x]$. Para la otra contención, si $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathfrak{p}_1[x] \cap \mathfrak{p}_2[x]$ entonces $a_j \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \sqrt{I}$ para todo $j = 0, \ldots, n$, así que $f \in \sqrt{I}[x] = \left(\sqrt{I}\right)^e \subset \sqrt{I^e} = \sqrt{I[x]}$.
   Sólo hace falta ver que $\mathfrak{p}_1[x]\mathfrak{p}_2[x] \subset I[x]$, pero esto también es claro pues, como $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset I$, de 1 de la proposición 3.47 se sigue

$$\mathfrak{p}_1[x]\mathfrak{p}_2[x] = \mathfrak{p}_1^e\mathfrak{p}_2^e = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)^e \subset I^e = I[x].$$

□

Lema 3.49. Sean I un ideal de R que no es radical. Para todo $g \in \sqrt{I[x]} \setminus I[x]$ existe $\tilde{g} \in \left(\sqrt{I}[x]\right) \setminus I[x]$ tal que $g - \tilde{g} \in I[x]$; consecuentemente $\left(I[x] :_{R[x]} g\right) = \left(I[x] :_{R[x]} \tilde{g}\right)$.

Demostración. Sea $g = \alpha_0 + \alpha_1x + \cdots + \alpha_mx^m \in \sqrt{I[x]} \setminus I[x]$. Definimos $J = \{j : \alpha_j \notin I\}$. Note que $J \neq \emptyset$ pues $g \notin I$. Sea $f' = \sum_{j \notin J} \alpha_j x^j$, claramente $f' \in I[x]$. Definimos $\tilde{g} = g - f'$; es rutinario verificar que $\left(I[x] :_{R[x]}: \tilde{g}\right) = \left(I[x] :_{R[x]} g\right)$. Vamos a mostrar que $\tilde{g} \in \left(\sqrt{I}[x]\right) \setminus I[x]$. Supongamos que $\tilde{g} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \sqrt{I[x]} \setminus I[x]$ es tal que $a_j \notin I$ para todo $j = 0, \ldots, n$. Como $\tilde{g} \in \sqrt{I[x]}$, se tiene que $\tilde{g}^{m_1} \in I[x]$ para algún $m_1 \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $a_j \in \sqrt{I}$ para todo $j = 0, \ldots, n$. Ahora bien $\tilde{g}^{m_1} = a_0^{m_1} + xg_1$ para algún $g_1 \in R[x]$, de donde $a_0^{m_1} \in I$ y así $a_0 \in \sqrt{I}$. Con esto

$$x\left(a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}\right) = g - a_0 \in \sqrt{I[x]},$$

si hacemos $g_2 = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$ tenemos que

$$x^{m_2}g_2^{m_2} \in I[x] \tag{3.12}$$

para algún $m_2 \in \mathbb{N}$. Dado que el coeficiente de x^{m_2} es 1, se tiene que los coeficientes de $x^{m_2}g_2^{m_2}$ son precisamente los coeficientes de $g_2^{m_2}$, así que de (3.12) se tiene que $a_1^{m_2} \in I$ y $a_1 \in \sqrt{I}$.
Supongamos que $h_k = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k \in \sqrt{I[x]} \setminus I[x]$, para algún $0 \leq k < n$, y que $a_0, \ldots, a_k \in \sqrt{I}$. Mostraremos que $a_{k+1} \in \sqrt{I}$. Tenemos

$x^{k+1}g_{k+1} = g - h_k \in \sqrt{I[x]}$, donde $g_{k+1} = a_{k+1} + a_{k+2}x + \cdots + a_n x^{n-k-1}$. Observe que el término independiente de g_{k+1} es a_{k+1}. Como antes

$$x^{(k+1)m_{k+1}} g_{k+1}^{m_{k+1}} \in I[x]$$

para algún $m_{k+1} \in \mathbb{N}$, los coeficientes de $x^{(k+1)m_{k+1}} g_{k+1}^{m_{k+1}}$ coinciden con los coeficientes de $g_{k+1}^{m_{k+1}}$ y por la relación anterior el término independiente de $g_{k+1}^{m_{k+1}}$ pertenece a I, es decir $a_{k+1}^{m_{k+1}} \in I$, de donde $a_{k+1} \in \sqrt{I}$. $\square$

Lema 3.50. Sea I un ideal de R y supongamos que $x, y \in R$ son tales que $x + y \in I$. Se tiene que $(I : x) = (I : y)$.

Demostración. Si $a \in (I : x)$ entonces $ax \in I$ y como $x + y \in I$ se cumple también $ax + ay \in I$, así que $ay \in I$; es decir $a \in (I : y)$.
La otra contención es análoga. $\square$

Lema 3.51. Sea I un ideal de R que no es radical tal que $(I :_R x) \in \operatorname{Spec}(R)$ para todo $x \in \sqrt{I} \setminus I$ y supongamos que $f \in \left(\sqrt{I} \setminus I\right)[x]$; es decir, f es un polinomio cuyos coeficientes pertenecen a $\sqrt{I} \setminus I$. Dado $g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \in R[x]$, se tiene que $g \in \left(I[x] :_{R[x]} f\right)$ si y solo si $b_j \in \left(I[x] :_{R[x]} f\right)$ para cada $j = 0, \ldots, m$.

Demostración. Supongamos que $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Es claro que $g \in \left(I[x] :_{R[x]} f\right)$ si $b_j \in \left(I[x] :_{R[x]} f\right)$.
Antes de mostrar la afirmación recíproca, notemos que, como $a_i \in \sqrt{I} \setminus I$ entonces $(I :_R a_i) \in \operatorname{Spec}(R)$ para todo $i = 0, \ldots, n$.
Supongamos que $g \in \left(I[x] :_{R[x]} f\right)$, es decir $gf \in I[x]$. Mostraremos por inducción que $b_0 a_i \in I$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Sabemos que $fg = \sum_l c_l x^l$, donde $c_l = \sum_{i+j=l} a_i b_j$, y como $fg \in I[x]$ entonces

$$c_l = \sum_{i+j=l} a_i b_j \in I, \tag{3.13}$$

esto para todo l, de donde $a_0 b_0 = c_0 \in I$. Para ver que $b_0 a_1 \in I$, observe que $b_1 a_0 + b_0 a_1 = c_1 \in I$, así que por el lema 3.50 se tiene que $(I :_R b_1 a_0) = (I :_R b_0 a_1)$, ahora bien $b_0 (b_1 a_0) = b_1 (b_0 a_0) \in I$ pues $b_0 a_0 \in I$, con esto $b_0 \in (I :_R b_1 a_0) = (I :_R b_0 a_1)$, así $b_0^2 \in (I :_R a_1)$, de donde $b_0 \in (I :_R a_1)$ pues $(I :_R a_1) \in \operatorname{Spec}(R)$, por lo que $b_0 a_1 \in I$. Ahora, sea $h \in \mathbb{N}$, $h < n$, tal que $b_0a_l \in I$ para todo $l \in \{0, \ldots, h\}$. Veamos que $b_0a_{h+1} \in I$. De la relación (3.13) tenemos

$$b_{h+1}a_0 + b_ha_1 + \cdots + b_1a_h + b_0a_{h+1} = c_{h+1} \in I$$

Si $t = b_{h+1}a_0 + b_ha_1 + \cdots + b_1a_h$ entonces $t + b_0a_{h+1} \in I$, por el lema 3.50 $(I :_R t) = (I :_R b_0a_{h+1})$. Dado que $b_0a_0, b_0a_1, \ldots, b_0a_h \in I$ entonces

$$\begin{aligned} b_0t &= b_0\left(b_{h+1}a_0 + b_ha_1 + \cdots + b_1a_h\right) \\ &= b_{h+1}\left(b_0a_0\right) + b_h\left(b_0a_1\right) + \cdots + b_1\left(b_0a_h\right) \in I \end{aligned}$$

de donde $b_0 \in (I :_R t) = (I :_R b_0a_{h+1})$; es decir $b_0^2 \in (I :_R a_{h+1})$ y por tanto $b_0a_{h+1} \in I$.
Supongamos ahora que $b_0a_i, \ldots, b_ka_i \in I$ para algún k tal que $0 \leq k < m$ y para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. Mostraremos que $b_{k+1}a_i \in I$ para todo i. Nuevamente de la relación (3.13) se tiene que

$$b_{k+1}a_0 + b_ka_1 + \cdots + b_1a_k + b_0a_{k+1} = c_{k+1} \in I$$

pero por hipótesis $b_ka_1, \ldots, b_0a_{k+1} \in I$, de donde se tiene que $b_{k+1}a_0 \in I$; esto muestra que $b_{k+1} \in (I :_R a_0)$. Sea $h \in \mathbb{N}$, $h < n - k - 1$, tal que $b_{k+1}a_l \in I$ para todo $l \in \{0, \ldots, h\}$. Debemos ver que $b_{k+1}a_{h+1} \in I$. De la relación usada anteriormente se tiene que

$$b_0a_{k+h+2} + \cdots + b_ka_{h+2} + b_{k+1}a_{h+1} + b_{k+2}a_h + \cdots + b_{k+h+2}a_0 = c_{k+h+2} \in I$$

y como $b_ja_i \in I$ para todo $j \in \{0, \ldots, k\}$ y para todo i, de la relación anterior se tiene que $b_{k+1}a_{h+1} + b_{k+2}a_h + \cdots + b_{k+h+2}a_0 = c_{k+h+2} \in I$. Como antes, definimos $t := b_{k+2}a_h + \cdots + b_{k+h+2}a_0$ y entonces $t + b_{k+1}a_{h+1} \in I$ y nuevamente por el lema 3.50 tenemos $(I :_R t) = (I :_R b_{k+1}a_{h+1})$. Por hipótesis de inducción $b_ka_h, \ldots, b_ka_0 \in I$, así que

$$\begin{aligned} b_{k+1}t &= b_{k+1}\left(b_{k+2}a_h + \cdots + b_{k+h+2}a_0\right) \\ &= b_{k+2}\left(b_{k+1}a_h\right) + \cdots + b_{k+h+2}\left(b_{k+1}a_0\right) \in I. \end{aligned}$$

Se sigue que $b_{k+1} \in (I :_R t)$ y por tanto $b_{k+1}^2 \in (I :_R a_{h+1})$, de donde $b_{k+1} \in (I :_R a_{h+1})$. □

Teorema 3.52. Dado un ideal I de un anillo R, se tiene que $I[x]$ es ideal 2-absorbente de $R[x]$ si y solo si I es ideal 2-absorbente de R.

Demostración. Si $I[x]$ es ideal 2-absorbente de $R[x]$, por el primer inciso del corolario 3.9 se tiene que $I = I[x] \cap R$ es ideal 2-absorbente de R. Recíprocamente, supongamos que I es ideal 2-absorbente de R. Dado que $I[x] \in \operatorname{Spec}(R[x])$ si y solo si $I \in \operatorname{Spec}(R)$, podemos suponer que $I \notin \operatorname{Spec}(R)$. Por el teorema 2.12 se tiene que $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}^2 \subset I$ para algún $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, o bien, $\sqrt{I} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset I$ y $\left(\sqrt{I}\right)^2 \subset I$, donde $\operatorname{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$ con $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$, de donde, por el lema 3.48, se tiene en particular que $\sqrt{I[x]} = \mathfrak{p}[x]$, o bien, $\sqrt{I[x]} = \mathfrak{p}_1[x] \cap \mathfrak{p}_2[x]$ y $\mathfrak{p}_1[x]\mathfrak{p}_2[x] \subset I[x]$. En cualquier caso es evidente que $I[x]$ no es radical. Debido a los teoremas 2.16 y 2.17 basta mostrar que para todo $f \in \sqrt{I[x]} \setminus I[x]$ se tiene que $\left(I[x] :_{R[x]} f\right) \in \operatorname{Spec}(R[x])$ para concluir que $I[x]$ es ideal 2-absorbente de $R[x]$. Sea $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \sqrt{I[x]} \setminus I[x]$, por el lema 3.49 podemos suponer que $a_i \in \sqrt{I} \setminus I$ para todo $i = 0, \ldots, n$. Por los teoremas 2.13 y 2.15 el conjunto $\{(I :_R a_i) : i = 0, \ldots, n\}$ está ordenado linealmente, así que existe k, $0 \leq k \leq n$, tal que $(I :_R a_k) \subset (I :_R a_i)$ para todo $i = 0, \ldots, n$. Dado que I es 2-absorbente y $a_k \in \sqrt{I} \setminus I$, por los teoremas 2.16 y 2.17 $(I :_R a_k) \in \operatorname{Spec}(R)$ y por tanto $(I :_R a_k)[x] \in \operatorname{Spec}(R[x])$. Mostraremos ahora que $\left(I[x] :_{R[x]} f\right) = (I :_R a_k)[x]$. Si $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in (I :_R a_k)[x]$ entonces

$$fg = \sum_l \left(\sum_{i+j=l} a_ib_j \right) x^l.$$

Como además $b_j \in (I :_R a_k) \subset (I :_R a_i)$ entonces $a_ib_j \in I$ para todos $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$; se sigue que $fg \in I[x]$ y así $g \in \left(I[x] :_{R[x]} f\right)$. Falta ver que $\left(I[x] :_{R[x]} f\right) \subset (I :_R a_k)[x]$. Para esto sea $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in \left(I[x] :_{R[x]} f\right)$. Por el lema 3.51 tenemos que $b_j \in \left(I[x] :_{R[x]} f\right)$; es decir, $a_ib_j \in I$. Con esto $b_j \in (I :_R a_i)$ para todos $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$, en particular $b_j \in (I :_R a_k)$, de donde $g \in (I :_R a_k)[x]$. □

Hasta este punto, sabemos que para $n = 1, 2$ la afirmación siguiente es cierta:
$I[x]$ es ideal n-absorbente de $R[x]$ si y solo si I es ideal n-absorbente de R.

Nótese que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la ida siempre es cierta por 1 del corolario 3.9, así que se tiene la conjetura de que la afirmación anterior es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. Aunque aún no se tiene una prueba de esta afirmación en general, avances recientes y soluciones parciales de ella pueden encontrarse en [8], [12] y [15].

La última parte de esta sección está dedicada a estudiar los ideales n-absorbentes de cierta clase de anillos; en la literatura estos anillos son conocidos como la "$D + \mathfrak{m}$ construcción". Supongamos que T es un dominio entero que puede escribirse en la forma $T = k + \mathfrak{m}$, donde k es un subanillo de T que además es campo y $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(T)$ es no nulo. Si D es un subanillo de k, con $Q(D) = k$, entonces $R = D + \mathfrak{m}$ es un subanillo de T y es tal que $Q(R) = Q(T)$, es decir, R y T tienen el mismo campo de cocientes. Es claro que $Q(R) \subset Q(T)$. Para ver la otra contención necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.53. Sea $R = D + \mathfrak{m}$ un subanillo de $T = k + \mathfrak{m}$, donde D es un subanillo del campo k y $Q(D) = k$. Para cada $x \in T$ existe $c \in k \setminus \{0\}$ tal que $cx \in R$.

Demostración. Como $x \in T$ entonces $x = a + m$ donde $a \in k$ y $m \in \mathfrak{m}$. Si $a = 0$ entonces $c = 1 \in k \setminus \{0\}$ es tal que $cx = x = m \in \mathfrak{m} \subset R$. Si $a \neq 0$ entonces a es unidad en k, en este caso $c = a^{-1} \in k \setminus \{0\}$ es tal que $cx = 1 + cm \in R$. □

Para mostrar que $Q(T) \subset Q(R)$, sea $\dfrac{x}{y} \in Q(T)$, donde $x, y \in T$ y $y \neq 0$. Por el lema anterior existen $c_1, c_2 \in k \setminus \{0\}$ tales que $c_1 x, c_2 y \in R$, de esta manera $c = c_1 c_2 \in k \setminus \{0\}$ es tal que $cx, cy \in R$ y así

$$\frac{x}{y} = \frac{cx}{cy} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{c_1 x}{c_2 y} \in Q(k) \cdot Q(R) \subset Q(R).$$

El primer resultado exhibe a los ideales n-absorbentes de $R = D + \mathfrak{m}$ que contienen a $\mathfrak{m}$.

Lema 3.54. Sea $T = k + \mathfrak{m}$ un domino entero, donde k es un subanillo de T que además es campo y $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(T)$ es no nulo de T, y sea $R = D + \mathfrak{m}$ un subanillo de T, donde D es un subanillo de k. Dado un ideal I de D, se tiene que $I + \mathfrak{m}$ es ideal n-absorbente de R si y solo si I es ideal n-absorbente de D; más aún $\omega_R(I + \mathfrak{m}) = \omega_D(I)$.

Demostración. De la segunda parte del corolario 3.9 tenemos que $I + \mathfrak{m}$ es ideal n-absorbente de R si y solo si $I + \mathfrak{m}/\mathfrak{m}$ es ideal n-absorbente de $R/\mathfrak{m}$, es decir, si y solo si I es ideal n-absorbente de D.
Del mismo resultado se sigue que $\omega_R(I + \mathfrak{m}) = \omega_D(I)$. □

PRECAUCIÓN.
Es importante mencionar que aunque $\mathfrak{m}$ es ideal maximal de $T = k + \mathfrak{m}$, no lo es necesariamente en $R = D + \mathfrak{m}$, donde D es subanillo de k. Si D es un

dominio entero que no es un campo entonces $R/\mathfrak{m} = D$ y por tanto $\mathfrak{m}$ no es ideal maximal de R. Por otro lado, es claro que si D es un subanillo de k que además es campo entonces $\mathfrak{m}$ sí es ideal maximal de R.

Quizá el ejemplo mas sencillo de estos anillos es $k[[x]]$, el anillo de series de potencias con coeficientes en un campo k, es claro que $k[[x]] = k + xk[[x]]$ y que $xk[[x]] \in \operatorname{Max}(k[[x]])$ es no nulo, de hecho estos anillos serán el objeto de estudio de esta última parte.

En el siguiente lema se caracterizan los ideales de $R = D + xk[[x]]$ que son comparables respecto a la inclusión con $xk[[x]]$. Supondremos que $R = D + xk[[x]]$ es subanillo de $T = k + xk[[x]]$, donde D es un subanillo del campo k.

Lema 3.55.

1. Los ideales de R que contienen a $xk[[x]]$ son de la forma $I + xk[[x]]$, donde I es un ideal de D.

2. Los ideales no nulos de R que están contenidos en $xk[[x]]$ son de la forma $Wx^n + x^{n+1}k[[x]]$, donde W es un D-submódulo de k y $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

1. Es claro que si $I + xk[[x]]$ es un ideal de R etonces $xk[[x]] \subset I$. Sea J un ideal de R y consideremos al subconjunto de D definido por $I_J = \{a \in D :\ \text{existe } h \in xk[[x]] \text{ tal que } a + h \in J\}$. Es claro que I_J es un ideal de D y además $J = I_J + xk[[x]]$.

2. Sea J un ideal no nulo de R contenido en $\mathfrak{m} = xk[[x]]$. Recordemos que, si $f = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} a_n x^n \in k[[x]]$ entonces el oden de f está definido por

$$\operatorname{ord}(f) = \operatorname{mín}\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a_n \neq 0 \text{ y } a_j = 0 \text{ para todo } j < n\}.$$

Sea $N = \operatorname{mín}\{\operatorname{ord}(f) : f \in J\}$. Observe que $N \geq 1$ pues $J \subset \mathfrak{m}$. Ahora bien, dado $f \in J$, podemos escribir $f = a_N x^N + a_{N+1}x^{N+1} + a_{N+2}x^{N+2} + \cdots$, donde $a_N \in k$ puede ser cero. Definimos

$$W = \left\{a \in k : \text{existe } g \in k[[x]] \text{ tal que } ax^N + x^{N+1}g \in J\right\}.$$

Es claro que W es un grupo aditivo abeliano y que es cerrado bajo multiplicación por elementos de D, por lo que W es un D-submódulo de k. Tenemos entonces que $J \subset Wx^N + x^{N+1}k[[x]]$. Veamos que de hecho se da la igualdad. Sea $p \in Wx^N + x^{N+1}k[[x]]$. Se tiene entonces que $p = wx^N + x^{N+1}f$, para algunos $w \in W$ y $f \in k[[x]]$. Como $w \in W$ existe $h \in k[[x]]$ tal que $g = wx^N + x^{N+1}h \in J$, de donde $\left(wx^N + x^{N+1}h\right) R \subset J$. Mostraremos primero que $wx^N \in J$ mostrando que $wx^N \in \left(wx^N + x^{N+1}h\right) R$. Tenemos

$$g = wx^N + x^{N+1}h = wx^N + b_0x^{N+1} + b_1x^{N+2} + \cdots \in J$$

donde podemos suponer que $b_0 \neq 0$. Buscamos $F = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \in R$ tal que $Fg = wx^N$, es decir

$$\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots\right)\left(w + b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + \cdots\right) = w.$$

Si $w = 0$ tomamos $F = 0$. Supongamos que $w \neq 0$. Los coeficientes $a_0 \in D$ y $a_1, a_2, a_3, \cdots \in k$ deben satisfacer las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} a_0w &= w \\ a_0b_0 + a_1w &= 0 \\ a_0b_1 + a_1b_0 + wa_2 &= 0 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + a_3w &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De este modo $a_0 = 1$ y las demás ecuaciones son ecuaciones lineales que se pueden ir resolviendo recursivamente, por lo que tienen solución única en k. Se sigue que $wx^N \in J$. Ahora bien, $wx^N + x^{N+1}h = g \in J$ y como ya vimos que $wx^N \in J$ se sigue que $x^{N+1}h \in J$. Ahora mostraremos que $x^{N+1} \in J$ mostrando nuevamente que $x^{N+1} \in \left(wx^N + x^{N+1}h\right) R$. Como antes, buscamos $G = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots \in R$ tal que $Gg = x^{N+1}$, es decir

$$\left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots\right)\left(wx^N + b_0x^{N+1} + b_1x^{N+2} + \cdots\right) = x^{N+1}.$$

Si $w = 0$ tenemos que resolver

$$\left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots\right)\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 \cdots\right) = 1,$$

pero como $b_0 \neq 0$ entonces h es unidad de $k[[x]]$ y así $G = h^{-1}$. En el caso en el que $w \neq 0$ debemos resolver

$$\left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots\right)\left(w + b_0x + b_1x^2 + \cdots\right) = x$$

de donde se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} c_0 w &= 0 \\ c_0 b_0 + w c_1 &= 1 \\ c_0 b_1 + c_1 b_0 + c_2 w &= 0 \\ c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 + c_3 w &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se sigue que $c_0 = 0$, $c_1 = 1/w$ y las demás ecuaciones se van resolviendo recursivamente, por lo que todas tienen solución en k. Lo anterior muestra que $x^{N+1} \in J$ y así $p = wx^N + x^{N+1} f \in J$.

$\square$

Lema 3.56. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $R = D + xk[[x]]$ es subanillo de $T = k + xk[[x]]$ entonces $\omega_T(x^n k[[x]]) = \omega_R(x^n k[[x]]) = n$.

Demostración. Observe que $\mathfrak{m}^n = x^n k[[x]] \subset R$. Por 1 del corolario 3.9 se tiene que $\omega_R(\mathfrak{m}^n) = \omega_R(R \cap \mathfrak{m}^n) \leq \omega_T(\mathfrak{m}^n) = n$, la última igualdad debido a que $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de T tal que $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$. Falta ver que $\omega_R(\mathfrak{m}^n) \geq 0$. Como $\omega_T(\mathfrak{m}^n) = n$, existen $F_1, \ldots, F_n \in T$ tales que $F_1 \cdots F_n \in \mathfrak{m}^n$ pero $F_1 \cdots \widehat{F_j} \cdots F_n \notin \mathfrak{m}^n$ para todo $j \in \mathbb{N}_n$. Por el lema 3.53, existen $c_1, \ldots, c_n \in k \setminus \{0\}$ tales que $f_j = c_j F_j \in R$, además $f_1 \cdots f_n \in \mathfrak{m}^n$. Si pasara que $f_1 \cdots \widehat{f_i} \cdots f_n \in \mathfrak{m}^n$ entonces $F_1 \cdots \widehat{F_i} \ldots F_n = c_1^{-1} \cdots \widehat{c_i^{-1}} \cdots c_n^{-1} f_1 \cdots \widehat{f_i} \cdots f_n \in \mathfrak{m}^n$, lo cual no es posible. Se sigue que $\omega_R(\mathfrak{m}^n) = n$. $\square$

En el siguiente teorema usaremos el hecho de que el anillo $k[[x]]$ es dominio de valuación discreta. Este hecho es sencillo de verificar como veremos a continuación. Sea

$$L = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n : a_n \in k \text{ y } \{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\} \text{ está acotado inferiormente} \right\}$$

y sea $K = L \cup \{0\}$. Es claro que K es anillo y de hecho es campo pues si $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n \in L$ entonces existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $f = x^N g$, para algún $g \in k[[x]]$ con término independiente no nulo. Se sigue que g es unidad en $k[[x]]$ y por tanto $x^{-N} g^{-1}$ es el inverso de f. Se tiene además que el campo de cocientes de $k[[x]]$ es K. Definiendo $\nu : L \longrightarrow \mathbb{Z}$ mediante

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n \mapsto \text{mín}\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$$

se tiene que ν es una valuación discreta para L.

El único ideal maximal de $k[[x]]$ es $xk[[x]]$ y por la proposición A.7 todo ideal propio no nulo de $k[[x]]$ es una potencia natural de $xk[[x]]$.

Teorema 3.57. Sean D un subanillo del campo k y $R = D + xk[[x]]$.

1. Si D es campo entonces todo ideal propio de R es ideal n-absorbente para algún $n \in \mathbb{N}$.

2. Si D es subanillo propio de k con $Q(D) = k$, entonces los ideales n-absorbentes no nulos de R tienen alguna de las siguientes formas:

   a) $I + xk[[x]]$, donde I es ideal n-absorbente de D.

   b) $x^m k[[x]]$, donde $m \in \mathbb{N}_n$.

   Además $\omega_R\left(I + xk[[x]]\right) = \omega_D(I)$ y $\omega_R\left(x^m k[[x]]\right) = m$.

Demostración.

1. Si $D = k$ entonces $R = k + xk[[x]] = k[[x]]$ y por el comentario previo a este teorema todo ideal propio no nulo de R es de la forma $x^n k[[x]]$ para algún $n \in \mathbb{N}$, por lo que es ideal n-absorbente. Supongamos entonces que D es un subcampo propio de k. Observe que $R = D + xk[[x]]$ es anillo local con único maximal $\mathfrak{m} = xk[[x]]$. Si I es un ideal propio no nulo de R, por el lema 3.55 se tiene que $I = Wx^n + x^{n+1}k[[x]]$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y algún D-submódulo W de k. Ahora bien, $\mathfrak{m}^{n+1} = x^{n+1}k[[x]] \subset I$, de donde $\mathfrak{m} \subset \sqrt{I}$ y como $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ se sigue que $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$, de donde I es $\mathfrak{m}$-primario, y como $\mathfrak{m}^{n+1} \subset I$, del teorema 3.26 concluimos que I es $(n+1)$-absorbente.

2. Supongamos que $D \subsetneq k$ y $Q(D) = k$, de esta manera $D \subsetneq Q(D) = k$. Si J es un ideal n-absorbente de R entonces J es comparable con $\mathfrak{m} = xk[[x]]$. Si $\mathfrak{m} \subsetneq J$ entonces $J = I + xk[[x]]$ para algún ideal I de D. Dado que $I + xk[[x]]$ es ideal n-absorbente de R, por el lema 3.54 se tiene que I es ideal n-absorbente de D y terminamos. Podemos suponer entonces que $J \subset \mathfrak{m}$. Por el lema 3.55 se tiene que $J = Wx^m + x^{m+1}k[[x]]$, para algún D-submódulo W de k y algún $m \in \mathbb{N}$. Si $W \subsetneq k$, existen $a, d \in D$, $a, d \neq 0$ tales que $a \in W$ pero $\dfrac{a}{d} \notin W$ y de hecho, por inducción se tiene que $\dfrac{a}{d^i} \notin W$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Observe ahora que para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $d^i\left(\dfrac{a}{d^i}x^m\right) = ax^m \in J$, pero $\dfrac{a}{d}x^m = d^{i-1}\left(\dfrac{a}{d}x^m\right) \notin J$ y $d^i \notin J$, por lo que J no es ideal i-absorbente de R para todo $i \in \mathbb{N}$,

lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que $W = k$ y así $J = x^m k[[x]]$. Dado que $xk[[x]]$ es ideal maximal de R se sigue que J es ideal m-absorbente, con $1 \leq m \leq n$.
Por el lema 3.54 tenemos $\omega_R(I + xk[[x]]) = \omega_D(I)$ y por el lema 3.56 se tiene $\omega_R(\mathfrak{m}^m) = m$.

$\square$

El siguiente ejemplo ilustra los dos casos del teorema anterior.

Ejemplo 12.

1. Sea $R = \mathbb{Q} + x\mathbb{R}[[x]]$. Observe que R es anillo local con único ideal maximal $\mathfrak{m} = x\mathbb{R}[[x]]$. Si I es un ideal propio no nulo de R entonces $I = Wx^n + x^{n+1}\mathbb{R}[[x]]$ para algún $\mathbb{Q}$-subespacio W de $\mathbb{R}$ y algún $n \in \mathbb{N}$. Como en la prueba del teorema anterior, se tiene que I es ideal $\mathfrak{m}$-primario de R y $\omega_R(I) \leq n + 1$. Si $W = \mathbb{R}$ entonces $I = x^n\mathbb{R}[[x]]$ y así $\omega_R(I) = n$, y si $W \neq \mathbb{R}$, se tiene que $\omega_R(I) = n + 1$; para ver esto, sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus W$, con $\alpha > 0$, y sea $\beta = \alpha^{\frac{1}{n}}$. Observe que $(\beta x)^{n+1} \in I$ pero $(\beta x)^n = \alpha x^n \notin I$.

2. Sea $R = \mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[[x]]$. El ideal $I = xR = \mathbb{Z}x + x^2\mathbb{Q}[[x]]$ no es ideaal n-absorbente para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, si suponemos que I es m-absorbente para algún $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $2^m \left(\dfrac{x}{2^m}\right) = x \in I$, pero $2^m \notin I$ y $\dfrac{1}{2}x \notin I$.
   Por el inciso 2 del teorema 3.57 un ideal n-absorbente no nulo de R tiene alguna de las siguientes formas:

   a) $I_1 = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}\mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[[x]]$, donde $p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{Z}$ son primos y $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ son tales que $n_1 + \cdots + n_s = n$.

   b) $I_2 = x^m\mathbb{Q}[[x]]$, donde $m \in \mathbb{N}_n$.

   Además $\omega_R(I_1) = n_1 + \cdots + n_s = n$ y $\omega_R(I_2) = m$.

3. Sea D un subanillo de un campo k con $D \subsetneq Q(D) = F \subsetneq k$. Los ideales no nulos de $R = D + xk[[x]]$ contenidos en $xk[[x]]$ tienen la forma $I = Wx^m + x^{m+1}k[[x]]$ para algún D-submódulo W de k y algún $m \in \mathbb{N}$. Si $W \subsetneq k$ entonces I puede o no ser ideal n-absorbente de R para algún $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, si $I_1 = Dx + x^2k[[x]]$ e $I_2 = Fx + x^2k[[x]]$ entonces $\omega_R(I_1) = \infty$ y $\omega_R(I_2) = 2$.

Demostración. Supongamos que I_1 es ideal n-absorbente para algún $n \in \mathbb{N}$. Existen $a, b \in D$, $a, b \neq 0$, tales que $\dfrac{a}{b} \in F \setminus D$. Observe que $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n \left(\dfrac{a^n}{b^n} x\right) = x \in I_1$, pero $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n \notin I_1$ y $\dfrac{a}{b} x \notin I_1$. Esto muestra que $\omega_R(I_1) = \infty$.

Veamos ahora que I_2 es ideal 2-absorbente de R. Sean $f, g, h \in R$ tales que $fgh \in I_2$. Supongamos que a_0, b_0, c_0 son los términos independientes de f, g, h respectivamente. Nótese que $fgh \in I_2$ implica $a_0 b_0 c_0 = 0$ y dado que D es dominio entero podemos suponer que $c_0 = 0$. Con esto $h = cx + x^2 h'$ para algunos $c \in D \subset k$ y $h' \in k[[x]]$, de donde $h \in I_2$. Se sigue que $gh \in I_2$ y por tanto I_2 es ideal 2-absorbente de R. Por último veamos que $I_2 \notin \operatorname{Spec}(R)$. Por hipótesis, existe $a \in k \setminus F$, observe que en particular se tiene $a \neq 0$. Ahora bien $(ax) \cdot \frac{1}{a} = x \in I_2$ pero $ax, \frac{1}{a} \notin I_2$, lo que muestra que $I_2 \notin \operatorname{Spec}(R)$ y por tanto $\omega_R(I_2) = 2$. □

3.3. Ideales n-absorbentes en anillos específicos

Esta sección está dedicada a estudiar ideales n-absorbentes en varias clases especiales de anillos conmutativos. Comenzaremos caracterizando los dominios de Dedekind en términos de sus ideales n-absorbentes (ver teorema 3.59). Recordemos que un dominio entero noetheriano de dimensión uno es un *dominio de Dedekind* si es enteramente cerrado. Observe que en un dominio de Dedekind todo ideal primo no nulo es maximal. En [16, teorema 13, p.275] se muestra que un dominio entero R es un dominio de Dedekind si y solo si cada ideal no nulo de R se puede escribir como producto (finito) de ideales primos. Usando esta definición alternativa, en [13, teorema 6.20, p.137] se presenta una lista en la cual se caracterizan a los dominios de Dedekind de entre todos los dominios enteros noetherianos y aunque esta lista es larga, sólo presentamos aquellas que ayudan en la prueba del teorema 3.59.

Teorema 3.58. [13, teorema 6.20, p.137] Si R es un dominio entero noetheriano entonces las siguientes afirmaciones son quivalentes:

1. R es un dominio de Dedekind.

2. Si I, J, K son ideales de R tales que $IK = JK$ y $K \neq 0$ entonces $I = J$.

3. Para cada $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ se tiene que, si J es un ideal de R tal que $\mathfrak{m}^2 \subset J \subset \mathfrak{m}$ entonces $J = \mathfrak{m}$ o bien $J = \mathfrak{m}^2$.

Teorema 3.59. Sea R un dominio entero noetheriano. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. R es dominio de Dedekind.

2. Si I es un ideal n-absorbente no nulo de R entonces $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_m$ para algunos $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_m \in \operatorname{Max}(R)$ y $m \in \mathbb{N}_n$.

Además, si $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$, donde $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n \in \operatorname{Max}(R)$ y R es dominio de Dedekind R que no es un campo, entonces $\omega(I) = n$.

Demostración.

1.⇒2. Si I es un ideal n-absorbente no nulo de R en particular es propio, por lo que $I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_m$ para algunos $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m \in \operatorname{Spec}(R)$. Dado que $I \neq 0$ se tiene que $\mathfrak{p}_j \neq 0$ para todo j y por tanto $\mathfrak{p}_j \in \operatorname{Max}(R)$. Ahora bien, si $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ es no nulo entonces $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$ por el teorema 3.58 y por el lema 3.16, $\omega\left(\mathfrak{m}^n\right) = n$. De esta manera, si escribimos $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k}$, donde $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ son tales que $n_1 + \cdots + n_k = m$, por el corolario 3.40 tenemos que $\omega(I) = m$ y por tanto $m \leq n$.

2.⇒1. Sea $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$. Observe primero que si J es un idel de R tal que $\mathfrak{m}^2 \subset J \subset \mathfrak{m}$ entonces $\sqrt{J} = \mathfrak{m}$, por lo que J es $\mathfrak{m}$-primario, como además $\mathfrak{m}^2 \subset J$, del teorema 2.21 se sigue que J es 2-absorbente, así que por hipótesis se tiene que $J = \mathfrak{m}_1$ o bien $J = \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ para algunos $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in \operatorname{Max}(R)$.

- Caso 1. $J = \mathfrak{m}_1$. En este caso tenemos $\mathfrak{m}_1 = J \subset \mathfrak{m}$ y como $\mathfrak{m}_1$ es maximal se sigue que $J = \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}$.
- Caso 2. $J = \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$. En este caso $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 = J \subset \mathfrak{m}$ y por el teorema 1.11 podemos suponer que $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}$, pero entonces $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}$ pues $\mathfrak{m}_1$ es maximal. Ahora bien, $\mathfrak{m} = \sqrt{J} = \sqrt{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2} = \sqrt{\mathfrak{m}\mathfrak{m}_2} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}_2$, de donde $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_2$ y por tanto $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_2$. Con esto $J = \mathfrak{m}^2$.

Lo anterior muestra que $J = \mathfrak{m}$ o bien $J = \mathfrak{m}^2$. Por el teorema 3.58 se sigue que R es dominio de Dedekind.

Para terminar, si R es un dominio de Dedekind que no es un campo e $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_k^{n_k}$ es un ideal de R, donde $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k \in \operatorname{Max}(R)$ son distintos y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ son tales que $n_1 + \cdots + n_k = n$, como en la prueba de 1.⇒2. se tiene que $\omega(I) = n$. $\square$

El siguiente lema ayuda a caracterizar los ideales n-absorbentes de un casi dominio de Dedekind (teorema 3.61). La definición de estos anillos así como resultados necesarios acerca de estos se encuentran en el apéndice A.

Lema 3.60. Sea I un ideal propio de un anillo R tal que que $\mathrm{Min}_R(I) = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k\} \subset \mathrm{Max}(R)$ y $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ si $i \neq j$. Supongamos que existen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que $I_{\mathfrak{m}_i} = (\mathfrak{m}_i^{n_i})_{\mathfrak{m}_i}$. Si $J = \mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_k^{n_k}$ entonces $I_{\mathfrak{m}} = J_{\mathfrak{m}}$ para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. Consecuentemente $I = J$.

Demostración. Sea $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. Tenemos dos casos posibles para $\mathfrak{m}$:

- Caso 1. $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Mostraremos en este caso que $J_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}} = I_{\mathfrak{m}}$. Para todo i se tiene que $\mathfrak{m}_i \nsubseteq \mathfrak{m}$, por lo que, para todo i, existe $a_i \in \mathfrak{m}_i$ tal que $a_i \notin \mathfrak{m}$. Note que $a = a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k} \in J \setminus \mathfrak{m}$, de donde $J \nsubseteq \mathfrak{m}$, por el inciso 1 a) del teorema A.9 se sigue que $J_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}$. Falta ver que $I_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}$. Observe que, si $I \subset \mathfrak{m}$ existiría $\mathfrak{m}_{i_0}$ tal que $I \subset \mathfrak{m}_{i_0} \subset \mathfrak{m}$ y de la maximalidad de $\mathfrak{m}_{i_0}$, se tendría que $\mathfrak{m}_{i_0} = \mathfrak{m}$, lo cual no puede ocurrir. Se sigue que $I \nsubseteq \mathfrak{m}$ y por el inciso 1 a) del teorema A.9, se concluye que $I_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}$.

- Caso 2. $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{i_0}$ para algún $i_0 \in \mathbb{N}_k$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i_0 = 1$. En este caso

$$J_{\mathfrak{m}} = \left(\mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_k^{n_k}\right)_{\mathfrak{m}_1} = \left(\mathfrak{m}_1^{n_1}\right)_{\mathfrak{m}_1} \left(\mathfrak{m}_2^{n_2} \cdots \mathfrak{m}_k^{n_k}\right)_{\mathfrak{m}_1}. \tag{3.14}$$

  Note que $\mathfrak{m}_2^{n_2} \cdots \mathfrak{m}_k^{n_k} \nsubseteq \mathfrak{m}_1$ pues $\mathfrak{m}_j \nsubseteq \mathfrak{m}_1$ para todo $j \neq 1$, por lo que $\left(\mathfrak{m}_2^{n_2} \cdots \mathfrak{m}_k^{n_k}\right)_{\mathfrak{m}_1} = R_{\mathfrak{m}_1}$. De (3.14) se sigue que $J_{\mathfrak{m}} = \left(\mathfrak{m}_1^{n_1}\right)_{\mathfrak{m}_1} = I_{\mathfrak{m}_1} = I_{\mathfrak{m}}$.

De los casos anteriores se concluye que $I_{\mathfrak{m}} = J_{\mathfrak{m}}$ para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. □

Teorema 3.61. Sea R un casi dominio de Dedekind y sea I un ideal propio no nulo de R. I es ideal n-absorbente de R si y solo si $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_m$, donde $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_m \in \mathrm{Max}(R)$ y $m \in \mathbb{N}_n$. Además $\omega\left(\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_m\right) = m$.

Demostración. Supongamos primero que I es ideal n-absorbente de R para algún $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema 3.10 se tiene que $\mathrm{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k\}$ con $k \leq n$, por el teorema A.21, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k \in \mathrm{Max}(R)$. Como R es casi dominio de Dedekind, $R_{\mathfrak{p}_i}$ es anillo de valuación noetheriano para cada $i = 1, \ldots, k$, y por el teorema A.8 se concluye que $R_{\mathfrak{p}_i}$ es dominio de valuación discreta, observe que el único ideal maximal de $R_{\mathfrak{p}_i}$ es $(\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i}$. Del inciso 3 de la proposición A.7 tenemos que $I_{\mathfrak{p}_i} = \left((\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i}\right)^{n_i} = (\mathfrak{p}_i^{n_i})_{\mathfrak{p}_i}$ para algún $n_i \in \mathbb{N}$.

Sea $J = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k}$. Por el lema anterior se sigue que $I = J$; es decir, I es producto de ideales maximales de R. Recíprocamente, si $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ para algunos $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n \in \operatorname{Max}(R)$, por el teorema 3.18 se tiene que I es ideal n-absorbente de R.
Sea $m \in \operatorname{Max}(R)$. Si $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$, por el teorema A.21 se tendría que $\mathfrak{m} = R$, lo cual no es posible. Se tiene entonces que $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por el lema 3.16 se sigue que $\omega(\mathfrak{m}^n) = n$. Para terminar, si $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_m = \mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_k^{n_k}$, donde $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k \in \operatorname{Max}(R)$ son todos distintos y $n_1 + \cdots + n_k = m$, por el corolario 3.40 se tiene que $\omega(I) = \omega\left(\mathfrak{m}_1^{n_1}\right) + \cdots + \omega\left(\mathfrak{m}_k^{n_k}\right) = m$. $\square$

Hemos visto anteriormente que existen anillos que poseen ideales propios que no son n-absorbentes para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver ejemplo 2). El siguiente teorema muestra que cuando el anillo es noetheriano, cada ideal propio es n-absorbente para algún $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.62. Sea R un anillo noetheriano. Para cada ideal propio I de R existe $n_I \in \mathbb{N}$ tal que I es ideal n_I-absorbente de R.

Demostración. Observe primero que si $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R por [17, lema 8.21, p.156] se tiene que $\mathfrak{p}^{m_\mathfrak{q}} = \left(\sqrt{\mathfrak{q}}\right)^{m_\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{q}$ para algún $m_\mathfrak{q} \in \mathbb{N}$, y del teorema 3.26 se concluye que $\mathfrak{q}$ es ideal $m_\mathfrak{q}$-absorbente de R. Ahora bien, si I es un ideal propio de R, por [17, corolario 4.35, p.78] se tiene que $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ donde $\mathfrak{q}_j$ es ideal $\mathfrak{p}_j$-primario. Por el comentario anterior se tiene que $\mathfrak{q}_j$ es m_j-absorbente para algún $m_j \in \mathbb{N}$ y por el inciso 3 del teorema 3.3 tenemos que I es ideal n_I-absorbente de R, donde $n_I = m_1 + \cdots + m_r$. $\square$

Debemos aclarar que el ejemplo 6 no contradice al teorema anterior, lo que podemos concluir entonces es que, en el inciso 1, $\omega(I), \omega\left(\mathfrak{p}_1^2\right), \omega\left(\mathfrak{p}_2^2\right) > 2$ y $\omega(I) > 3$ en el inciso 2.

El siguiente objetivo es caracterizar los ideales n-absorbentes de un anillo de valuación (teorema 3.65). Tenemos una definición y un lema previos.

Definición 3.63. Un anillo R es un *anillo de Bézout* si todo ideal finitamente generado de R es principal. Un *dominio de Bézout* es un anillo de Bézout que además es un dominio entero.

Del inciso 2 de la proposición A.4 se sigue que todo anillo de valuación es dominio de Bézout.

Lema 3.64. Si R es un anillo de Bézout, I es un ideal n-absorbente de R y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ es tal que $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{p}^n \subset I$. En particular esto se cumple si R es un anillo de valuación.

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{p}$. Mostraremos que $a_1 \cdots a_n \in I$. Note que $(a_1, \ldots, a_n) \subset \mathfrak{p}$ y dado que R es anillo de Bézout se sigue que $(a_1, \ldots, a_n) = (a)$ para algún $a \in \mathfrak{p}$. De esta manera $a_1 \cdots a_n = a^n b$ para algún $b \in R$. Como $a \in \mathfrak{p} = \sqrt{I}$, por el inciso 4 del teorema 3.3 tenemos que $a^n \in I$ y así $a_1 \cdots a_n = a^n b \in I$.
Si R es un anillo de valuación entonces es un dominio de Bézout y la afirmación es clara. $\square$

Teorema 3.65. Sean R un anillo de valuación y $n \in \mathbb{N}$. Dado un ideal I de R, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. I es ideal n-absorbente de R.
2. I es ideal $\mathfrak{p}$-primario de R para algún $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ y $\mathfrak{p}^n \subset I$.
3. $I = \mathfrak{p}^m$ para algunos $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq n$.

Además, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ no es idempotente y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\omega(\mathfrak{p}^n) = n$.

Demostración.

1.⇒2. Supongamos que I es un ideal n-absorbente de R. Como I es ideal propio, por el corolario A.3 del apéndice A, se tiene que $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ para algún $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, además, por el lema 3.28, $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$ es ideal primo dividido. Del teorema 3.29 se sigue que I es ideal $\mathfrak{p}$-primario de R y por el lema 3.64 se tiene $\mathfrak{p}^n \subset I$.

2.⇒3. Por hipótesis se tiene que $M = \{r \in \mathbb{N} : \mathfrak{p}^r \subset I\} \neq \emptyset$. Sea $m = \min M$ y observe que $1 \leq m \leq n$. Veamos que $I \subset \mathfrak{p}^m$. Como $\mathfrak{p}^{m-1} \not\subseteq I$ y R es anillo de valuación, se tiene que $I \subsetneq \mathfrak{p}^{m-1}$, por lo que existe $y \in \mathfrak{p}^{m-1} \setminus I$, así
$$(y) \subset \mathfrak{p}^{m-1} \tag{3.15}$$
y además $(y) \not\subseteq I$, de donde $I \subset (y)$. Si consideramos $J = (I : y)$, por el lema A.5, se tiene que $J \cdot (y) = I$. Observe que si $a \in J$ entonces la igualdad anterior implica que $ay \in I$, por lo que $a \in \sqrt{I} = \mathfrak{p}$ pues I es primario, de donde $J \subset \mathfrak{p}$. De esta última relación y de (3.15) se sigue que $I = J \cdot (y) \subset \mathfrak{p}\mathfrak{p}^{m-1} = \mathfrak{p}^m$. Con esto $\mathfrak{p}^m \subset I \subset \mathfrak{p}^m$ y así $I = \mathfrak{p}^m$.

3.⇒1. Primero observe que, como R es dominio entero, entonces $\operatorname{Nil}(R) = 0 \in \operatorname{Spec}(R)$. Si $I = 0$ terminamos por lo que podemos suponer que $I \neq 0$. Dado que I es ideal propio, por el corolario A.3, se tiene que $\sqrt{I} \in \operatorname{Spec}(R)$. Ahora bien $\operatorname{Nil}(R) = 0 \subsetneq \sqrt{I}$ son ideales primos divididos de R y del teorema 3.30 se sigue que $I = \mathfrak{p}^m$ es ideal m-absorbente de R y como $m \leq n$ se tiene también que I es ideal n-absorbente de R.

Para concluir la demostración, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ no es idempotente entonces $\mathfrak{p}^2 \subsetneq \mathfrak{p}$ y así $\mathfrak{p}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{p}^n$. Del teorema 3.30 se sigue que $\omega(\mathfrak{p}^n) = n$. $\square$

El ejemplo 13 (ver más abajo) muestra que la hipótesis de ser noetheriano es necesaria en los teoremas 3.59 y 3.62. En la segunda parte de dicho ejemplo haremos uso de los hechos que citamos a continuación.

Observación 8. Sea R un anillo de valuacion con campo de cocientes $Q(R)$ y valuación asociada $\nu : Q(R) \longrightarrow G \cup \{\infty\}$. Recuerde que ν es epimorfismo y además si $\nu(x) = \nu(y)$, $x, y \in R$, entonces $x = uy$ para alguna unidad u de R.

1. Si I es un ideal de R y $x \in I$ es tal que $\nu(x) < \nu(ab)$ para todos $a, b \in I$ entonces $x \notin I^2$.

2. Sean $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ y $p \in \mathfrak{p}$. Si existen $u, m \in R$ tales que u es unidad y $p = um^2$ entonces $p \in \mathfrak{p}^2$.

3. Sean $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ y G' un grupo abeliano ordenado.

   a) Si $G = \mathbb{Q} \oplus G'$ y $p \in \mathfrak{p}$ es tal que $\nu(p) = (r, 0)$, con $r > 0$, entonces $p \in \mathfrak{p}^2$.

   b) Si $G = G' \oplus \mathbb{Q}$ y $p \in \mathfrak{p}$ es tal que $\nu(p) = (0, r)$, con $r > 0$, entonces $p \in \mathfrak{p}^2$.

Demostración.

1. Si $x \in I^2$ se tendría $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, donde $a_i, b_i \in I$. Si, digamos, $\nu(a_1 b_1) = \min_i \{\nu(a_i b_i)\}$, entonces $\nu(x) \geq \nu(a_1 b_1) > \nu(x)$ los cual es una contradicción, de donde se sigue que $x \notin I^2$.

2. Como $um^2 = p \in \mathfrak{p}$ y u es unidad se sigue que $m^2 \in \mathfrak{p}$, de donde $m \in \mathfrak{p}$, $m^2 \in \mathfrak{p}^2$ y entonces $um^2 \in \mathfrak{p}^2$; es decir, $p \in \mathfrak{p}^2$.

3. Antes de realizar la pueba de las afirmaciones correspondientes a este inciso debemos recordar que toda suma directa de grupos abelianos ordenados es un grupo abeliano ordenado cuyo orden es el lexicográfico. En tal caso se tiene que

$$R = \nu^{-1}(\{(x, y) \in G : x > 0\}) \cup \nu^{-1}(\{(0, y) \in G : y \geq 0\})$$
$$\mathfrak{m} = \nu^{-1}(\{(x, y) \in G : x > 0\}) \cup \nu^{-1}(\{(0, y) \in G : y > 0\})$$

donde $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de R.

a) Como $r > 0$ entonces $\frac{r}{2} > 0$ y así $\left(\frac{r}{2}, 0\right) \in \mathfrak{m}$. Dado que ν es epimorfismo existe $x \in \mathfrak{m}$ tal que $\nu(x) = \left(\frac{r}{2}, 0\right)$. Observe ahora que $\nu\left(x^2\right) = \nu(x) + \nu(x) = (r, 0) = \nu(p)$ de donde $p = ux^2$ para alguna unidad u de R. Del inciso 2 de esta observación se sigue que $p \in \mathfrak{p}^2$.

b) Este inciso es análogo al inciso anterior.

$\square$

Ejemplo 13.

1. Sea R un anillo de valuación con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y $\dim(R) = 1$. Observe que si J es un ideal propio no nulo de R entonces $\sqrt{J} = \mathfrak{m}$ pues R es uno-dimensional y local, por lo que todo ideal propio no nulo de R es $\mathfrak{m}$-primario.

   a) Si $\mathfrak{m}$ es principal entonces R es dominio de valuación discreta y para cada ideal propio I de R, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que I es n-absorbente.

   b) Si $\mathfrak{m}$ no es principal entonces $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ y los únicos ideales n-absorbentes de R para cualquier $n \in \mathbb{N}$ son 0 y $\mathfrak{m}$.

2. Sea R un anillo de valuación con $\dim(R) = 2$ y grupo de valores G. Sean $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ los únicos ideales primos no nulos de R (véase observación 13), $K = Q(R)$ y $\nu : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ la valuación determinada por R, de manera que $R = \{x \in K : \nu(x) \geq 0\}$ y $\mathfrak{m} = \{x \in K : \nu(x) > 0\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, se tienen las siguientes afirmaciones.

   a) Si $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ entonces $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{m}^2 \neq \mathfrak{m}$. Por lo que los únicos ideales n-absorbentes de R son 0, $\mathfrak{p}^k$ y $\mathfrak{m}^k$, para algún $k \in \mathbb{N}_n$.

   b) Si $G = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ entonces $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ y los únicos ideales n-absorbentes de R son $0, \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{m}$.

   c) Si $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ entonces $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ y los únicos ideales n-absorbentes de R son 0, $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{p}^k$ para algún $k \in \mathbb{N}_n$.

   d) Si $G = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$ entonces $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{m}^2 \neq \mathfrak{m}$, además los únicos ideales n-absorbentes de R son $0, \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{m}^k$, donde $k \in \mathbb{N}_n$.

Demostración.

1. a) Supongamos que $\mathfrak{m} = (a)$ con $a \neq 0$. Observe que $\mathfrak{m}^2 \subsetneq \mathfrak{m}$ pues de lo contrario $a = ra^2$ para algún $r \in R$, de donde $1 = ra$;

es decir, a es unidad y así $\mathfrak{m} = R$. Del inciso 2 teorema A.6 se tiene que el conjunto de todos los ideales $\mathfrak{m}$-primarios de R es $\{\mathfrak{m}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y por tanto el conjunto de todos los ideales propios de R es $\{0\} \cup \{\mathfrak{m}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se sigue que todo ideal propio es una potencia de su radical y del corolario A.12 se sigue que R es dominio de valuación discreta.

Dado un ideal propio I de R se tienen dos casos:

a) $I = 0$. En este caso I es ideal 1-absorbente, es decir, un ideal primo.

b) $I \neq 0$. En este caso $I = \mathfrak{m}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, por lo que I es ideal m-absorbente. De hecho $\omega(I) = n$ pues $\mathfrak{m}^{m+1} \subsetneq \mathfrak{m}^m$.

b) Supongamos que $\mathfrak{m}$ no es principal. Como $\mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m}$ basta ver que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^2$. Sea $a \in \mathfrak{m}$ y supongamos que $a \notin \mathfrak{m}^2$. Dado que $\mathfrak{m}$ no es principal tenemos $(a) \subsetneq \mathfrak{m}$ y como $a \notin \mathfrak{m}^2$ en particular se tiene que $a \neq 0$, por lo que se tiene la cadena de ideales $0 \subsetneq (a) \subsetneq \mathfrak{m}$, dado que $\dim(R) = 1$ se sigue que $(a) \notin \operatorname{Spec}(R)$. Existen entonces $x, y \in R$ tales que $xy = ar$ para algún $r \in R$ pero $x, y \notin (a)$. Observe que $r \neq 0$ pues en caso contrario $x \in (a)$ o $y \in (a)$ lo cual no ocurre. Por otro lado, $x, y \notin (a)$ implica que $x, y \neq 0$ y además x, y no son unidades de R, por lo que $x, y \in \mathfrak{m}$ y así $ar = xy \in \mathfrak{m}^2$. Si $r \notin \mathfrak{m}$ entonces r sería unidad de R y la relación $ar \in \mathfrak{m}^2$ implicaría que $a \in \mathfrak{m}^2$, lo cual es una contradicción, por tanto $r \in \mathfrak{m}$. Tenemos además que $(a) \subset (x), (y)$ y entonces $a = xa_x$ y $a = ya_y$ para algunos $a_x, a_y \in R$. Usando nuevamente la relación $ar = xy$, de las igualdades anteriores se tiene que $y = a_x r$ y $x = a_y r$. Si, digamos, a_x fuese unidad entonces $(y) = (r)$, de donde $xy = ar = a(zy)$ y como $y \neq 0$ la igualdad anterior implica que $x = az$; es decir, $x \in (a)$ lo cual no puede ocurrir. Lo anterior muestra que a_x no es unidad y de manera análoga se tiene que a_y no es unidad, así que $a_x, a_y \in \mathfrak{m}$. Ahora bien, $ar = xy$, $x = a_y r$, $y = a_x r$ y $r \neq 0$ implican que $a = ra_x a_y \in \mathfrak{m}^3 \subset \mathfrak{m}^2$, de donde $a \in \mathfrak{m}^2$, que es una contradicción. Se sigue que $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$.

Como $\omega(0) = \omega(\mathfrak{m}) = 1$ es claro que 0 y $\mathfrak{m}$ son ideales n-absorbentes de R para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Si J es un ideal tal que $0 \subsetneq J \subsetneq \mathfrak{m}$ entonces $\sqrt{J} = \mathfrak{m}$. Si J fuese ideal n-absorbente de R para algún $n \in \mathbb{N}$, por el teorema 3.65, se tendría que $J = \left(\sqrt{J}\right)^m = \mathfrak{m}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq m \leq n$ y como $\mathfrak{m}$ es idempotente se tiene que $J = \mathfrak{m}$, lo cual no es posible. Esto muestra que los únicos ideales n-absorbentes de R son 0 y $\mathfrak{m}$.

2. Consideremos en cualquiera de los incisos a), b), c) y d) a los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in G : x > 0\} \\ B &= \{(0,y) \in G : y > 0\} \\ C &= \{(0,y) \in G : y \geq 0\} \end{aligned}$$

es claro que $\mathfrak{m} = \nu^{-1}(A) \cup \nu^{-1}(B)$ y $R = \nu^{-1}(A) \cup \nu^{-1}(C)$. Observe además que $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ y $(x,y) > (0,z)$ para todos $(x,y) \in A$, $(0,z) \in B \cup C$.

a) Mostraremos que $\mathfrak{p}^2 \subsetneq \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \{0\}$. Consideremos los siguientes casos.

- Caso 1. $\nu^{-1}(B) \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$. En este caso el conjunto

$$\{z \in \mathbb{N} : \text{ existe } p \in \mathfrak{p} \text{ con } \nu(p) = (0,z)\}$$

es no vacío y entonces posee un elemento mínimo, digamos, y. Sea $p_y \in \mathfrak{p}$ tal que $\nu(p_y) = (0,y)$. Afirmamos que $\nu(ab) > \nu(p_y)$ si $a,b \in \mathfrak{p}$. Dados $a,b \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ se tiene que $\nu(a) = (x_a, y_a), \nu(b) = (x_b, y_b) \in A \cup B$ y además

$$\nu(ab) = (x_a + x_b, y_a + y_b).$$

Si $x_a > 0$ o $x_b > 0$; es decir, si $\nu(a) \in A$ o $\nu(b) \in A$ entonces $x_a + x_b > 0$, así que $\nu(ab) = (x_a + x_b, y_a + y_b) > (0,y) = \nu(p_y)$ y terminamos; podemos suponer entonces que $\nu(a), \nu(b) \notin A$ y por tanto $x_a = 0 = x_b$ e $y_a, y_b > 0$. Con esto $y_a + y_b > y_a \geq y$, de donde $\nu(ab) > \nu(p_y)$. De la observación anterior se sigue que $p_y \notin \mathfrak{p}^2$.

- Caso 2. $\nu^{-1}(B) \cap \mathfrak{p} = \emptyset$. En este caso se tiene que $\mathfrak{p} \subset \nu^{-1}(A)$, por lo que $\nu(\mathfrak{p}) \subset A$ y además el conjunto

$$\{z \in \mathbb{N} : \text{ existe } p_z \in \mathfrak{p} \text{ con } \nu(p_z) = (z,t)\}$$

es no vacío y tiene un elemento mínimo, digamos, x. Sea $p_x \in \mathfrak{p}$ tal que $\nu(p_x) = (x,y)$. Por otro lado, dados $a,b \in \mathfrak{p}$ se tiene que $\nu(a) = (x_a, y_a), \nu(b) = (x_b, y_b) \in \mathfrak{p}$ así que $x_a, x_b > 0$, por lo que $x_a + x_b > x_a \geq x$ y así

$$\nu(ab) = (x_a + x_b, y_a + y_b) > (x,y) = \nu(p_x).$$

Como en el caso anterior se sigue que $p_x \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$.

De los casos anteriores se concluye que $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.Ahora, si I es un ideal n-absorbente no nulo de R entonces $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ para algún $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, por el teorema 3.65 se tiene que $I = \mathfrak{p}^k$ para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que todo ideal primo no nulo de R es no idempotente se tiene que $\omega(\mathfrak{p}^n) = n$, además $\omega(0) = 1$.

b) Mostraremos que $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $\mathfrak{p} \neq 0$, para ello, sólo hace falta ver que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^2$. Dado $p \in \mathfrak{p}$ se tiene que $\nu(p) = (x_p, y_p)$, aquí $x_p, y_p \in \mathbb{Q}$. Como $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ entonces $\nu(p) \in A$ o $\nu(p) \in B$; es decir, $x_p > 0$ o bien, $x_p = 0$ y $y_p > 0$, de donde $\dfrac{x_p}{2} > 0$ o bien, $\dfrac{x_p}{2} = 0$ y $\dfrac{y_p}{2} > 0$, por lo que $\left(\dfrac{x_p}{2}, \dfrac{y_p}{2}\right) \in A \cup B$. Sea $m \in \mathfrak{m}$ tal que $\nu(m) = \left(\dfrac{x_p}{2}, \dfrac{y_p}{2}\right)$ y note que $\nu(m^2) = \nu(p)$ por lo que $p = um^2$ para alguna unidad u de R. De la observación anterior se sigue que $p \in \mathfrak{p}^2$ y por tanto $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^2$. En particular se tiene que $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$.
En este caso, si I es un ideal n-absorbente no nulo de R, por el teorema 3.65, se tiene que $I = \left(\sqrt{I}\right)^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq m \leq n$. Dado que $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ o $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ y todo ideal primo de R es idempotente, se tiene que $I = \mathfrak{p}$ e $I = \mathfrak{m}$ son los únicos ideales n-absorbentes no nulos de R para todo $n \in \mathbb{N}$. Además $\omega(0) = \omega(\mathfrak{p}) = \omega(\mathfrak{m}) = 1$.

c) Veamos primero que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^2$. Si $a \in \mathfrak{m}$ entonces $\nu(a) = (x, y)$ donde $x \in \mathbb{Z}$ es tal que $x \geq 0$. Consideremos los siguientes casos:

1. $x = 0$. En este caso $\nu(a) = (0, y)$ con $y \in \mathbb{Q}$ e $y > 0$. De la observación 8 se sigue que $a \in \mathfrak{m}^2$.
2. $x = 1$. En este caso $\nu(a) = (1, y)$ y tenemos los siguientes subcasos
   i) $y > 0$. En este caso $\nu(a) = (1, y) = \left(1, \frac{y}{2}\right) + \left(0, \frac{y}{2}\right)$ y entonces existen $b, c \in \mathfrak{m}$ tales que $\nu(b) = \left(1, \frac{y}{2}\right), \nu(c) = \left(0, \frac{y}{2}\right)$, además $\nu(a) = \nu(bc)$. Con esto $a = ubc$, con u unidad de R, y es claro que $a \in \mathfrak{m}^2$.
   ii) $y = 0$. Aquí $\nu(a) = (1, 0) = (1, -1) + (0, 1) = \nu(d) + \nu(e) = \nu(de)$ para algunos $d, e \in \mathfrak{m}$. Nuevamente $a = ude$ para alguna unidad u y por tanto $a \in \mathfrak{m}^2$.
   iii) $y < 0$. En este caso $-y > 0$ y además si $f \in \mathfrak{m}$ es tal que $\nu(f) = (0, -y)$ entonces $f \neq 0$ (en caso contrario

$\nu(f)=\infty$) y

$$\nu\left(\frac{a}{f}\right)=\nu(a)-\nu(f)=(1,2y)\in A$$

de donde $\frac{a}{f}=z\in\mathfrak{m}$ y así $a=fz\in\mathfrak{m}^2$.

3. $x\geq 2$. Sea $b\in\mathfrak{m}$ tal que $\nu(b)=\left(1,\frac{y}{x}\right)\in A$ y note que $\nu\left(b^x\right)=(x,y)=\nu(a)$. Se tiene entonces que $a=ub^x$, con u unidad y como $x\geq 2$, $b^x\in\mathfrak{m}^2$, de donde $a\in\mathfrak{m}^2$.

En cualquiera de los casos anteriores se tiene que $a\in\mathfrak{m}^2$, de donde $\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}^2$ y por tanto $\mathfrak{m}^2=\mathfrak{m}$.
Veamos ahora que $\mathfrak{p}^2\subsetneq\mathfrak{p}$. La contención $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}$ implica que $\nu(\mathfrak{p})\subset A\cup B$ por lo que existe

$$x=\text{mín}\left\{z\in\mathbb{N}\cup\{0\}:(z,-)=\nu(p)\text{ para algún }p\in\mathfrak{p}\right\}.$$

Sea $p_x\in\mathfrak{p}$ tal que $\nu\left(p_x\right)=(x,q)$. Si $x=0$ entonces $\nu\left(p_x\right)=(0,q)$ con $q\in\mathbb{Q}$ y $q>0$. Dado que $\left(0,\frac{q}{2}\right)\in A$ existe $m\in\mathfrak{m}$ tal que $\nu(m)=\left(0,\frac{q}{2}\right)$ y además $\nu\left(m^2\right)=\nu\left(p_x\right)$ por lo que $m^2=up$ para alguna unidad u y así $m\in\mathfrak{p}$. De esta manera $m\in\mathfrak{p}$ es tal que $\nu(m)=\left(0,\frac{q}{2}\right)<(0,q)=\nu\left(p_x\right)$ lo cual no puede ocurrir. Esto muestra que $x>0$.
Observe ahora que si $a\in\mathfrak{p}$ entonces $(n,t)=\nu(a)\geq(x,q)$ de donde $n\geq x>0$. Sean $a,b\in\mathfrak{p}$; veamos que $\nu(ab)>\nu\left(p_x\right)$. Se tiene que $\nu(a)=\left(x_a,y_a\right)$, $\nu(b)=\left(x_b,y_b\right)$ y por el comentario previo se tiene que $x_a,x_b>0$ y como $x_a+x_b>x_a\geq x$ se sigue que

$$\nu(ab)=\left(x_a+x_b,y_a+y_b\right)>(x,q)=\nu\left(p_x\right).$$

De la observación 8 se concluye que $p_x\notin\mathfrak{p}^2$ de donde $\mathfrak{p}^2\subsetneq\mathfrak{p}$.
Dado que $\sqrt{I}=\mathfrak{p}$ o $\sqrt{I}=\mathfrak{m}$ para todo ideal propio no nulo de R y $\mathfrak{m}$ es idempotente, tenemos que si I es n-absorbente entonces $I=\mathfrak{p}^m$, con $1\leq m\leq n$, o bien $I=\mathfrak{m}$ (teorema 3.65), así que los únicos ideales n-absorbentes no nulos de R son $\mathfrak{p}^k$ y $\mathfrak{m}$. Además $\omega(0)=\omega(\mathfrak{m})=1$ y $\omega\left(\mathfrak{p}^n\right)=n$.

d) Antes de realizar la prueba de este inciso haremos una observación importante. Dado que $(0,1)\in B$ existe $\alpha\in\mathfrak{m}$ tal que $\nu(\alpha)=(0,1)$. Veamos que $\alpha\notin\mathfrak{p}$. Supongamos que $\alpha\in\mathfrak{p}$ y sea $m\in\mathfrak{m}$. Tenemos que $\nu(m)=(r,t)$ con $r\in\mathbb{Q}$ y $r\geq 0$.

   i) Si $r=0$ entonces $t\in\mathbb{N}$ y además

$$\nu(m)=(0,t)=t(0,1)=t\nu(\alpha)=\nu\left(\alpha^t\right)$$

por lo que, para alguna unidad u de R, $m = u\alpha^t \in \mathfrak{p}$.

ii) Si $r > 0$ hay tres posibles casos para $t \in \mathbb{Z}$, a saber $t < 0$, $t = 0$ y $t > 0$, en cada uno de los cuales u denotará una unidad de R.
Si $t < 0$ entonces $-t > 0$ y

$$\nu(m) = (r, 2t) + (-t)(0, 1) = \nu(a) + \nu\left(\alpha^{-t}\right) = \nu\left(a\alpha^{-t}\right),$$

donde $a \in \mathfrak{m}$ es tal que $\nu(a) = (r, 2t)$. Se sigue que $m = ua\alpha^{-t} \in \mathfrak{p}$.
Si $t = 0$ entonces $\nu(m) = (r, 0)$, además

$$\nu(m) = (r, -1) + (0, 1) = \nu(b) + \nu(\alpha) = \nu(b\alpha),$$

donde $b \in \mathfrak{m}$ es tal que $\nu(b) = (r, -1)$. De la igualdad anterior se tiene que $m = ub\alpha \in \mathfrak{p}$.
Si $t > 0$ entonces $\nu(m) = (r, 0) + t(0, 1) = \nu\left(c\alpha^t\right)$, donde $c \in \mathfrak{m}$ es tal que $\nu(c) = (r, 0)$. Tenemos así que $m = uc\alpha^t \in \mathfrak{p}$.

En cualquiera de los casos anteriores se concluye que $m \in \mathfrak{p}$, de donde $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ lo cual no puede ocurrir. Esto muestra que $\alpha \notin \mathfrak{p}$.
Veamos ahora que $\mathfrak{m}^2 \subsetneq \mathfrak{m}$. Nótese que $(0, 1) < (0, n) < (r, t)$ para todos $(0, n) \in B$ y $(r, t) \in A$. Sean $a, b \in \mathfrak{m}$; mostraremos que $\nu(ab) > \nu(\alpha)$. Tenemos que $\nu(ab) = (x_a + x_b, y_a + y_b)$. Si $x_a = 0 = x_b$ entonces $y_a, y_b \in \mathbb{N}$ de donde $y_a + y_b > 1$ y así $\nu(ab) = (0, y_a + y_b) > (0, 1) = \nu(\alpha)$ y terminamos. Si, digamos, $x_a > 0$ entonces $x_a + x_b \geq x_a > 0$ de donde $\nu(ab) = (x_a + x_b, y_a + y_b) > (0, 1) = \nu(\alpha)$. De la observación 8 se sigue que $\alpha \notin \mathfrak{m}^2$ y por tanto $\mathfrak{m}^2 \subsetneq \mathfrak{m}$.
Falta ver que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^2$. Dado $p \in \mathfrak{p}$ se tiene que $\nu(p) = (x, y)$ con $x \in \mathbb{Q}$ y $x \geq 0$. No puede ocurrir que $x = 0$ pues en tal caso $\nu(p) = (0, y)$ con $y \in \mathbb{N}$ y así

$$\nu(p) = y(0, 1) = y\nu(\alpha) = \nu\left(\alpha^y\right),$$

de donde $\alpha^y = up \in \mathfrak{p}$ y $\alpha \in \mathfrak{p}$ lo cual hemos visto anteriormente que no ocurre. Esto muestra que $x > 0$.
Como $\nu(p) = (x, y)$ y $x > 0$ hay tres posibles casos para $y \in \mathbb{Z}$: $y < 0$, $y = 0$ e $y \geq 1$, en cada uno de los cuales u será una unidad de R.

- Si $y < 0$ entonces $-y > 0$ y además

$$\nu(p) = (x, 0) + (-y)(0, 1) = \nu(a) + (-y)\nu(\alpha) = \nu\left(a\alpha^{-y}\right),$$

donde $a \in \mathfrak{m}$ es tal que $\nu(a) = (x, 0)$. Tenemos así que $ua\alpha^{-y} = p \in \mathfrak{p}$ y como $u, \alpha \notin \mathfrak{p}$ se sigue que $a \in \mathfrak{p}$ y por la observación 8 $a \in \mathfrak{p}^2$, de donde es claro que $p \in \mathfrak{p}^2$.

- Si $y = 0$ entonces $\nu(p) = (x, 0)$ y por la observación 8, $p \in \mathfrak{p}^2$.
- Si $y \geq 1$ entonces $\left(\frac{x}{y}, 1\right) \in A$. Sea $b \in \mathfrak{m}$ tal que $\nu(b) = \left(\frac{x}{y}, 1\right)$ y observe que $\nu\left(b^y\right) = \nu(p)$ por lo que $ub^y = p \in \mathfrak{p}$, con lo cual $b \in \mathfrak{p}$. Si $y \geq 2$ es claro que $b^y \in \mathfrak{p}^2$ y entonces $p \in \mathfrak{p}^2$. Por otro lado, si $y = 1$ entonces $\nu(p) = (x, 1)$ y $\nu(p) = (x, 0) + (0, 1) = \nu(a\alpha)$ con $a \in \mathfrak{m}$ y $\nu(a) = (x, 0)$. Con esto $ua\alpha = p \in \mathfrak{p}$ y como $u, \alpha \notin \mathfrak{p}$, $a \in \mathfrak{p}$. Nuevamente por la observación 8 se sigue que $a \in \mathfrak{p}^2$ y por tanto $p \in \mathfrak{p}^2$.

El análisis previo muestra que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^2$.
Si I es un ideal propio no nulo de R, como en los incisos ateriores, se tiene que $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ o $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. Si además I es n-absorbente entonces $I = \mathfrak{p}^k = \mathfrak{p}$ o bien $\sqrt{I} = \mathfrak{m}^m$, donde $1 \leq m \leq n$, así que los únicos ideales n-absorbentes de R son $0, \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{m}^m$, donde $1 \leq m \leq n$. Además $\omega(0) = \omega(\mathfrak{p}) = 1$ y $\omega\left(\mathfrak{m}^m\right) = m$.

$\square$

En el inciso 2 b) del ejemplo anterior R es un anillo de valuación de dimensión 2 tal que sus únicos ideales n-absorbentes son sus ideales primos. De hecho, para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es posible dar un anillo de valuación R tal que $\dim(R) = m$ y sus únicos ideales n-absorbentes son sus ideales primos, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14. Para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ existe un anillo de valuación R tal que $\dim(R) = m$ y sus únicos ideales n-absorbentes son sus ideales primos para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. En efecto, dado $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si R es un anillo de valuación con grupo de valores $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$, por la observación 13 del apéndice B, se tiene que $\dim(R) = m$. Sea $\nu : K \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$ la valuación asociada a R. Como en el ejemplo anterior el ideal maximal de R es $\mathfrak{m} = \{a \in R : \nu(a) > 0\}$ y dado que $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$ tiene el orden lexicográfico, denotando $A = \{\overline{x} \in G : x_1 > 0\}$ y

$$B = \{\overline{x} \in G : \text{existe } k > 1 \text{ con } x_i = 0 \text{ si } i \leq k - 1, \text{ y } x_k > 0\},$$

donde x_i es la i-ésima coordenada de $\overline{x} \in G$, es claro que $\mathfrak{m} = \nu^{-1}(A) \cup \nu^{-1}(B)$.
Para mostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ los únicos ideales n-absorbentes de R son sus ideales primos, sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ con $\mathfrak{p} \neq 0$ y veamos que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^2$. Como $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, dado $a \in \mathfrak{p}$ se tiene que $\nu(a) = \overline{p} \in A \cup B$, por lo que $p_1 > 0$ o bien, para algún $k > 1$, $p_1 = \cdots = p_{k-1} = 0$ y $p_k > 0$. Definiendo $\overline{q} \in G$ mediante $q_j = \dfrac{p_j}{2}$ es claro que $\overline{q} \in A \cup B$, por lo que $\overline{q} = \nu(b)$ para algún $b \in \mathfrak{m}$ y dado que $\nu(a) = \nu\left(b^2\right)$ tenemos que $a = ub^2$ para alguna unidad u de R. La igualdad anterior implica que $b \in \mathfrak{p}$ por lo que $b^2 \in \mathfrak{p}^2$ y por tanto $a = ub^2 \in \mathfrak{p}^2$. Lo anterior muestra que $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$, es decir, todo ideal primo de R es idempotente.
Para terminar, es claro que todo ideal primo de R es n-absorbente para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, si I es un ideal n-absorbente de R, por el teorema 3.65, se tiene que $I = \left(\sqrt{I}\right)^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq n$. Si $I = 0$ entonces $I \in \operatorname{Spec}(R)$ y terminamos; supongamos entonces que $I \neq 0$. Al ser R anillo de valuación se tiene que $\sqrt{I} \in \operatorname{Spec}(R)$ y por tanto es idempotente, con esto $I = \left(\sqrt{I}\right)^k = \sqrt{I}$ así que $I \in \operatorname{Spec}(R)$. $\square$

Obsérvese que si un anillo de valuación R tiene grupo de valores $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$, $m \geq 2$, entonces R no es noetheriano pues en caso contrario, al ser anillo de valuación, sería dominio de valuación discreta y entonces tendría dimensión uno lo cual no es posible pues hemos mostrado que en este caso $\dim(R) = m$. Esto muestra que la hipótesis de noetherianidad en el teorema 3.62 es necesaria. Por otro lado, un anillo R como en el ejemplo 13 1 b) no es noetheriano pues de serlo sería de valuación discreta y entonces $\mathfrak{m}^2 \neq \mathfrak{m}$. Dado que R no es noetheriano no puede ser dominio de Dedekind; sin embargo la afirmación 2 del teorema 3.59 es válida pues, por lo demostrado en dicho ejemplo, el único ideal n-absorbente no nulo de R es $I = \mathfrak{m}$ que es claramente un producto de ideales maximales. Esto muestra que la hipótesis de noetherianidad del teorema 3.59 es necesaria.

Como siguiente paso, se van a caracterizar los ideales n-absorbentes de los dominios de Prüfer. Definiciones y resultados necesarios acerca de estos anillos se encuentran en la sección 3 del apéndice A.

Teorema 3.66. Sea R un dominio de Prüfer. Un ideal propio I de R es n-absorbente para algún $n \in \mathbb{N}$ si y solo si I es producto de ideales primos de R. Además, si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k \in \operatorname{Spec}(R)$ son incomparables y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ son tales que $n_i = 1$ si $\mathfrak{p}_i$ es idempotente entonces $\omega\left(\mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k}\right) = n_1 + \cdots + n_k$.

Demostración. Sea I un ideal n-absorbente de R. Si $I = 0$ terminamos, así que podemos suponer que $I \neq 0$. Supongamos además que $\mathrm{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k\}$, donde $k \leq n$ y $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ si $i \neq j$. Al ser I un ideal n-absorbente de R e $I \subset \mathfrak{p}_i$ por el teorema 3.7 se tiene que $I_{\mathfrak{p}_i}$ es ideal n-absorbente del anillo de valuación $R_{\mathfrak{p}_i}$, así que por el teorema 3.65 existe $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i \leq n$, tal que $I_{\mathfrak{p}_i} = \left(\sqrt{I_{\mathfrak{p}_i}}\right)^{n_i}$. Afirmamos ahora que $\sqrt{I_{\mathfrak{p}_i}} = (\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i}$. Para todo $j \neq i$ se tiene que $\mathfrak{p}_j$ y $\mathfrak{p}_i$ son incomparables, así que en particular, para $j \neq i$ se tiene que $\mathfrak{p}_j \cap (R \setminus \mathfrak{p}_i) \neq \emptyset$ y entonces $(\mathfrak{p}_j)_{\mathfrak{p}_i} = R_{\mathfrak{p}_i}$. De esta manera

$$\begin{aligned}
\sqrt{I_{\mathfrak{p}_i}} &= \left(\sqrt{I}\right)_{\mathfrak{p}_i} \\
&= (\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_i \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k)_{\mathfrak{p}_i} \\
&= (\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{p}_i} \cap \cdots \cap (\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i} \cap \cdots \cap (\mathfrak{p}_k)_{\mathfrak{p}_i} = (\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i}.
\end{aligned}$$

Tenemos así que $I_{\mathfrak{p}_i} = (\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}_i}^{n_i} = (\mathfrak{p}_i^{n_i})_{\mathfrak{p}_i}$. Sea $J = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k}$ y sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de R. Mostraremos que $I_{\mathfrak{m}} = J_{\mathfrak{m}}$. Tenemos dos posibles casos para $\mathfrak{m}$:

- Caso 1. $\mathfrak{m} \not\supset I$. En este caso $I_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}$ y además existe $a \in I$ tal que $a \notin \mathfrak{m}$. Dado que $I \subset \mathfrak{p}_j$, se tiene que $a^{n_j} \in \mathfrak{p}_j^{n_j} \setminus \mathfrak{m}$, de donde $a^{n_1+\cdots+n_k} \in J \setminus \mathfrak{m}$, por lo que $J_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}} = I_{\mathfrak{m}}$.

- Caso 2. $\mathfrak{m} \supset I$. En este caso existe $\mathfrak{p}_j$ tal que $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}_j \supset I$. Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \in \mathrm{Min}_R(I)$ los únicos ideales primos tales que $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{m}$, $j = 1, \ldots, r$, $r \leq k$. Como antes, $I_{\mathfrak{m}}$ es ideal n-absorbente del anillo de valuación $R_{\mathfrak{m}}$ así que por el teorema 3.65 se tiene que

$$I_{\mathfrak{m}} = \left(\sqrt{I_{\mathfrak{m}}}\right)^l = ((\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r)_{\mathfrak{m}})^l = \left((\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r)^l\right)_{\mathfrak{m}}$$

para algún $l \in \mathbb{N}$ tal que $l \leq n$. Usando el inciso 5 del teorema A.14 y el hecho de que $\mathfrak{p}_i^N$ y $\mathfrak{p}_j^M$ son primos entre sí para todos $N, M \in \mathbb{N}$ se sigue que $I_{\mathfrak{m}} = \left(\mathfrak{p}_1^l \cdots \mathfrak{p}_r^l\right)_{\mathfrak{m}}$. Por otro lado

$$J_{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k})_{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{n_r})_{\mathfrak{m}}.$$

Supongamos que $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$, $s \leq r$, no son idempotentes. Dado que $(I_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}_j} = I_{\mathfrak{p}_j}$ (véase [3, ejercicio 3, p.50]) se sigue que

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{p}_j^{n_j}\right)_{\mathfrak{p}_j} &= I_{\mathfrak{p}_j} = (I_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}_j} = \left(\left(\mathfrak{p}_j^l\right)_{\mathfrak{m}}\right)_{\mathfrak{p}_j} = \left(((\mathfrak{p}_j)_m)_{\mathfrak{p}_j}\right)^l \\
&= \left((\mathfrak{p}_j)_{\mathfrak{p}_j}\right)^l = \left(\mathfrak{p}_j^l\right)_{\mathfrak{p}_j}.
\end{aligned}$$

Dado $j \in \mathbb{N}_s$, si $l < n_j$, como $l+1 \leq n_j$, entonces

$$\left((\mathfrak{p}_j)_{\mathfrak{p}_j}\right)^l = \left(\mathfrak{p}_j^l\right)_{\mathfrak{p}_j} = \left(\mathfrak{p}_j^{n_j}\right)_{\mathfrak{p}_j} \subset \left(\mathfrak{p}_j^{l+1}\right)_{\mathfrak{p}_j} \subset \left(\mathfrak{p}_j^l\right)_{\mathfrak{p}_j} = \left((\mathfrak{p}_j)_{\mathfrak{p}_j}\right)^l.$$

Con esto $\left((\mathfrak{p}_j)_{\mathfrak{p}_j}\right)^{l+1} = \left((\mathfrak{p}_j)_{\mathfrak{p}_j}\right)^l$ en el anillo de valuación $R_{\mathfrak{p}}$. Dado que $\left(\mathfrak{p}_j^{l+1}\right)_{\mathfrak{p}_j}, \left(\mathfrak{p}_j^l\right)_{\mathfrak{p}_j}$ son $(\mathfrak{p}_j)_{\mathfrak{p}_j}$-primarios la última igualdad implica que $\mathfrak{p}_j^{l+1} = \mathfrak{p}_j^l$ y por la proposición A.17 se sigue que $\mathfrak{p}_j$ es idempotente, lo cual es una contradicción. Un razonamiento análogo muestra que tampoco puede darse que $n_j < l$, luego $n_j = l$ para todo $j \in \mathbb{N}_s$ y por tanto $\left(\mathfrak{p}_j^l\right)_{\mathfrak{m}} = \left(\mathfrak{p}_j^{n_j}\right)_{\mathfrak{m}}$. Note ahora que si algún $\mathfrak{p}_i$ fuese idempotente entonces $\mathfrak{p}_i^{n_i} = \mathfrak{p}_i^l$; de donde $(\mathfrak{p}_i^{n_i})_{\mathfrak{m}} = \left(\mathfrak{p}_i^l\right)_{\mathfrak{m}}$. Se sigue que $I_{\mathfrak{m}} = J_{\mathfrak{m}}$.

De los casos anteriores se concluye que $I = J$, es decir, I es producto de ideales primos.

Recíprocamente, supongamos que I es producto de ideales primos de R. Por el inciso 3 b) de la proposición A.19 podemos suponer que $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k}$ donde $\mathfrak{p}_i$ y $\mathfrak{p}_j$ son incomparables si $i \neq j$ y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ son tales que $n = n_1 + \cdots + n_k$. Por el inciso 3 a) de la misma proposición tenemos que $\mathfrak{p}_i$ y $\mathfrak{p}_j$ son primos entre sí siempre que $i \neq j$ y así, por la proposición 1.21, se tiene que $\mathfrak{p}_i^{n_i} + \mathfrak{p}_j^{nj} = R$. Con esto $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k} = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k^{n_k}$. Para terminar, por el inciso 2 de la proposición A.19, se tiene que $\mathfrak{p}_i^{n_i}$ es ideal $\mathfrak{p}_i$-primario de R luego, por el teorema 3.26, se tiene que $\mathfrak{p}_i^{n_i}$ es ideal n_i-absorbente de R. Del inciso 3 del teorema 3.3 se sigue que I es ideal n-absorbente de R.

Si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k \in \operatorname{Spec}(R)$ son incomparables y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ entonces $\mathfrak{p}_i^{n_i} + \mathfrak{p}_j^{n_j} = R$ si $i \neq j$ (proposición A.19 y proposición 1.21). Del corolario 3.40 se tiene que $\omega\left(\mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k}\right) = \omega\left(\mathfrak{p}_1^{n_1}\right) + \cdots + \omega\left(\mathfrak{p}_k^{n_k}\right)$. Si $\mathfrak{p}_i$ es idempotente entonces $\omega\left(\mathfrak{p}_i^{n_i}\right) = \omega\left(\mathfrak{p}_i\right) = 1 = n_i$ y si $\mathfrak{p}_i$ no es idempotente entonces $\mathfrak{p}_i^{n_i+1} \subsetneq \mathfrak{p}_i^{n_i}$, además, como $\mathfrak{p}_i^{n_i}$ es ideal $\mathfrak{p}_i$-primario, del teorema 3.26 se sigue que $\omega\left(\mathfrak{p}_i^{n_i}\right) = n_i$ y por tanto $\omega\left(\mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k}\right) = n_1 + \cdots + n_k$. □

Ya se ha visto que todo ideal propio de un anillo noetheriano y de ciertos anillos de valuación es n-absorbente para algún $n \in \mathbb{N}$, por lo que tiene sentido definir, para cualquier anillo R, el siguiente conjunto

$$\Omega(R) = \{\omega_R(I) : I \text{ es ideal propio de } R\}.$$

Observe que $\{1\} \subset \Omega(R) \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

En el ejemplo y teoremas siguientes se dan los posibles valores para $\Omega(R)$ en varias clases de anillos.

Ejemplo 15.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ es un primo positivo y $R = \mathbb{Z}_{p^n}$ entonces $\Omega(R) = \mathbb{N}_n$. En efecto, si J es un ideal propio de R, por el teorema de la correspondencia, existe un ideal propio I de $\mathbb{Z}$ con $p^n\mathbb{Z} \subset I$, tal que $J = I/p^n\mathbb{Z}$ y por el corolario 3.9 inciso 2 se tiene que $\omega_R(J) = \omega_{\mathbb{Z}}(I)$. De la relación $p^n\mathbb{Z} \subset I$ se tiene que $p\mathbb{Z} = \sqrt{p^n\mathbb{Z}} \subset \sqrt{I}$ y como en $\mathbb{Z}$ todo ideal primo es maximal se sigue que I es $p\mathbb{Z}$-primario. Del teorema 3.26 se tiene que $\omega_{\mathbb{Z}}(I) \leq n$, de donde $\omega_R(J) \leq n$ y por tanto $\Omega(R) \subset \mathbb{N}_n$. Por otro lado, si $m \in \mathbb{N}_n$ entonces $J = p^m\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ es un ideal propio de R con $\omega_R(J) = \omega_{\mathbb{Z}}(p^m\mathbb{Z}) = m$ pues el ideal maximal $p\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ es tal que $p^{m+1}\mathbb{Z} \subsetneq p^m\mathbb{Z}$.

2. Sea $n = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, donde $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}$ son primos positivos distintos y $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Sean además $R = \mathbb{Z}_n$ y, para cada $j = 1, \ldots, k$, $R_j = \mathbb{Z}_{p_j^{n_j}}$. Se tiene entonces que $\Omega(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{N}_m$, donde $n_1 + \cdots + n_k = m$. En efecto, si I es un ideal propio de $\mathbb{Z}_n$ entonces $I = I_1 \times \cdots \times I_k$, donde I_j es un ideal de R_j y algún $I_j \neq R_j$. Por el teorema 3.38 y el inciso anterior se tiene que

$$\omega_R(I) = \omega_{R_1}(I_1) + \cdots + \omega_{R_k}(I_k) \leq n_1 + \cdots + n_k = m,$$

de donde $\omega_R(I) \in \mathbb{N}_m$. Para ver la otra contención sea $s \in \mathbb{N}_m$. Existen entonces $l \in \mathbb{N}$, $l \leq k$, y $t \in \mathbb{N}$, $t \leq n_{l+1}$, tales que $s = n_1 + \cdots + n_l + t$. Por el inciso anterior, para cada $j = 1, \ldots, l+1$, existen ideales I_j de R_j tales que $\omega_{R_j}(I_j) = n_j$ si $j \in \mathbb{N}_l$, y $\omega_{R_{l+1}}(I_{l+1}) = t$. Sea

$$I = I_1 \times \cdots \times I_l \times I_{l+1} \times R_{l+2} \times \cdots \times R_k$$

y note que I es un ideal de R tal que $\omega_R(I) = s$.

3. Sea $R = \mathbb{Z}$ (o cualquier DIP que no sea un campo). Por el inciso 4 del teorema 3.3 se tiene que $\Omega(R) = \mathbb{N}$.

4. Sea $R = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$ y sean I, I_n como en el ejemplo 2. Recordemos que $\omega(I_n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\omega(I) = \infty$. Es claro entonces que $\Omega(R) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

5. Sea R un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y de dimensión cero tal que $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el lema 3.16 se tiene que $\omega(\mathfrak{m}^n) = n$, así que $\mathbb{N} \subset \Omega(R)$.

6. Sean $T = \mathbb{Q} + x\mathbb{R}[[x]]$, $\mathfrak{m} = x\mathbb{R}[[x]]$ y $n \in \mathbb{N}$. Por el inciso 1 del ejemplo 12, se tiene que $\Omega(T) = \mathbb{N}$. Si $R = T/\mathfrak{m}^n$ entonces $\Omega(R) = \{1, \ldots, n\}$ por el corolario 3.9 inciso 2.

El inciso 5 del ejemplo anterior muestra que el recíproco del siguiente teorema es falso, pues un anillo local R con $\dim(R) = 0$ puede tener $\Omega(R)$ infinito.

Teorema 3.67. Sean R un anillo y $n \in \mathbb{N}$ tal que todo ideal propio de R es n-absorbente. Se tiene que $\dim(R) = 0$ y $|\mathrm{Max}(R)| \leq n$.

Demostración. Supongamos que $\dim(R) \geq 1$. Existen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ tales que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$. Sean $x \in \mathfrak{q} \setminus \mathfrak{p}$ e $I = x^{n+1}R$. Dado que I es ideal n-absorbente se tiene que $x^n \in I$ y así $x^n = x^{n+1}y$ para algún $y \in R$, de donde $x^n(1 - xy) = x^n - x^{n+1}y = x^n - x^n = 0 \in \mathfrak{p}$; como $\mathfrak{p}$ es primo y $x^n \notin \mathfrak{p}$ se sigue que $1 - xy \in \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$. Dado que $x \in \mathfrak{q}$ la relación $1 - xy \in \mathfrak{q}$ implica que $1 \in \mathfrak{q}$ lo cual es imposible. Esto muestra que $\dim(R) = 0$ y por tanto todo ideal primo de R es maximal. Ahora bien, por hipótesis el ideal trivial 0 es n-absorbente, por lo que hay a lo más n ideales primos y entonces maximales de R que son minimales sobre 0. Por tanto, si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de R entonces $0 \subset \mathfrak{m}$, así que existiría un ideal primo minimal sobre 0 contenido en $\mathfrak{m}$ y de la maximalidad de los ideales primos se concluye que $\mathfrak{m}$ es un primo minimal sobre 0, lo que muestra que los ideales maximales de R son los primos minimales sobre 0. $\square$

El teorema 3.69 concluye con los resultados de esta sección y da los posibles valores para $\Omega(R)$. El siguiente lema ayudará a alcanzar el objetivo.

Lema 3.68. Sea $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ finitamente generado. Si $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = 0$. En particular, si R es noetheriano con $\dim(R) \geq 1$ entonces existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R tal que $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \geq 1$. Existe entonces $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ tal que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. En el anillo local $R_\mathfrak{m}$ se tiene que $\mathfrak{p}_\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m}_\mathfrak{m}$ y además $\mathfrak{m}_\mathfrak{m}\mathfrak{m}_\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}_\mathfrak{m}^n$. Como $\mathfrak{m}_\mathfrak{m}$ es finitamente generado, por el lema de Nakayama, se tiene que $\mathfrak{m}_\mathfrak{m}^n = 0$, pero entonces $\mathfrak{m}_\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ con $\mathfrak{p}_m \in \mathrm{Spec}(R_\mathfrak{m})$, de donde $\mathfrak{m}_\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ y como $\mathfrak{m}_\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R_\mathfrak{m})$ se tiene que $\mathfrak{m}_\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ lo cual es una contradicción. Se concluye así que $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = 0$.
Supongamos que R es noetheriano con $\dim(R) \geq 1$ y que para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$. Como $\mathfrak{m}$ es finitamente generado, por lo demostrado en la primera parte se tiene que $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = 0$.

Por otro lado, dado que $\dim(R) \geq 1$, existen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ tales que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$, observe que $\mathfrak{q}$ no es ideal maximal. Por el teorema de Krull existe $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ tal que $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$, pero así $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{m}$ lo cual contradice el hecho de que $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) = 0$. □

Hemos llegado al último resultado de esta sección.

Teorema 3.69. Sean R, R_1, R_2 anillos.

1. Si $|\operatorname{Max}(R)| = n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N}_n \subset \Omega(R)$. Si $|\operatorname{Max}(R)| = \infty$ entonces $\mathbb{N} \subset \Omega(R)$.

2. Si I es un ideal propio de R entonces $\Omega\left(R/I\right) \subset \Omega(R)$.

3. $\Omega(R) \subset \Omega\left(R[x]\right)$.

4. $\Omega\left(R_1 \times R_2\right) = \Omega\left(R_1\right) + \Omega\left(R_2\right)$, donde
$$\Omega\left(R_1\right) + \Omega\left(R_2\right) := \left\{\omega_1 + \omega_2 : \omega_1 \in \Omega\left(R_1\right), \omega_2 \in \Omega\left(R_2\right)\right\}.$$

5. Si M es un R-módulo entonces $\Omega(R) \subset \Omega\left(R(+)M\right)$.

6. Sea $T = k + \mathfrak{m}$ un dominio entero, donde k es un subanillo de T que además es un campo y $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(T)$, y sea D un subanillo de k. Se tiene que $\Omega(D) \subset \Omega(D + \mathfrak{m})$.

7. R es un campo si y solo si $\Omega(R) = \{1\}$.

8. Si R es un anillo artiniano entonces $\Omega(R) = \{1, \ldots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

9. Si R es noetheriano con $\dim(R) \geq 1$ entonces $\Omega(R) = \mathbb{N}$.

10. Supongamos que R es un anillo de valuación que no es un campo. Si R es un dominio de valuación discreta entonces $\Omega(R) = \mathbb{N}$. Si R no es dominio de valuación discreta entonces

    a) $\Omega(R) = \{1, \infty\}$ si todos los ideales primos no nulos de R son idempotentes.

    b) $\Omega(R) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si R posee ideales primos no nulos que no son idempotentes.

Demostración.

1. Supongamos primero que $|\mathrm{Max}(R)| = n$. Dado $m \in \mathbb{N}_n$ se tiene que, si $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_m \in \mathrm{Max}(R)$ son distintos entonces $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_m$ es ideal propio de R y además, por el teorema 3.13, $\omega(I) = m$, de donde $m \in \Omega(R)$ y por tanto $\mathbb{N}_n \subset \Omega(R)$. De manera análoga se muestra que $\mathbb{N} \subset \mathrm{Max}(R)$ si $|\mathrm{Max}(R)| = \infty$.

2. Si $n \in \Omega(R/I)$ entonces $n = \omega_{R/I}(J/I)$ para algún ideal propio J de R tal que $J \supset I$, pero por el inciso 2 del corolario 3.9 se tiene que $n = \omega_R(J)$, de donde $n \in \Omega(R)$.

3. Sea $n \in \Omega(R)$. Se tiene entonces que $n = \omega_R(I)$ para algún ideal propio I de R y por el teorema 3.46 se tiene que $n = \omega_{R[x]}(I, x)$, de donde $n \in \Omega(R[x])$.

4. Si $\omega_{R_1 \times R_2}(I_1 \times I_2) \in \Omega(R_1 \times R_2)$, por el teorema 3.38 se tiene que $\omega_{R_1 \times R_2}(I_1 \times I_2) = \omega_{R_1}(I_1) + \omega_{R_2}(I_2) \in \Omega(R_1) + \Omega(R_2)$. Para ver la otra contención, si $n + m \in \Omega(R_1) + \Omega(R_2)$ existen ideales propios I_j de R_j, $j = 1, 2$, tales que $\omega_{R_1}(I_1) = n$ y $\omega_{R_2}(I_2) = m$, luego el ideal propio $I_1 \times I_2$ de $R_1 \times R_2$ es tal que $\omega_{R_1 \times R_2}(I_1 \times I_2) = n + m$ (teorema 3.38 nuevamente), de donde $n + m \in \Omega(R_1 \times R_2)$.

5. Si $n = \omega_R(I)$ para algún ideal propio I de R, por el lema 3.44, se tiene que $n = \omega_{R(+)M}(I(+)M)$, por lo que $\Omega(R) \subset \Omega(R(+)M)$.

6. Si $n = \omega_D(I)$ para algún ideal propio I de D, por el lema 3.54 se tiene que $n = \omega_{D+\mathfrak{m}}(I + \mathfrak{m})$ y por tanto $n \in \Omega(D + \mathfrak{m})$.

7. Una implicación es clara. Por otro lado, si $\Omega(R) = \{1\}$ entonces todo ideal propio de R es primo. Nótese que R es dominio entero pues por hipótesis el ideal 0 es primo. Sea $x \in R$, $x \neq 0$. Veamos que x es unidad. Si $(x^2) = R$ la afirmación es clara, por lo que podemos suponer que $(x^2) \subsetneq R$. Como (x^2) es ideal primo y $x^2 \in (x^2)$ entonces $x \in (x^2)$ y así $x = ax^2$ para algún $a \in R$, como además $x \neq 0$ se sigue que $ax = 1$ y por tanto x es unidad. Lo anterior muestra que R es un campo.

8. Supongamos primero que R es un anillo artiniano local con único ideal maximal $\mathfrak{m} \neq 0$ (si $\mathfrak{m} = 0$ entonces R es campo y así $\Omega(R) = \{1\}$). Se tiene entonces que $\mathfrak{m}^m = \mathfrak{m}^{m+1}$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Dado que R es artiniano en particular es noetheriano, así que $\mathfrak{m}$ es finitamente generado y por el lema de Nakayama se sigue que $\mathfrak{m}^m = 0$. Sea $M = \min\{m \in \mathbb{N} : \mathfrak{m}^m = 0\}$ y observe que si $n \in \mathbb{N}_{M-1}$ entonces, por el lema 3.16, $\mathfrak{m}^n$ es un ideal propio de R tal que $\omega_R(\mathfrak{m}^n) = n$, de donde

$\mathbb{N}_{M-1} \subset \Omega(R)$. Por otro lado, si J es un ideal propio de R, como $\dim(R) = 0$ y $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de R, entonces $\sqrt{J} = \mathfrak{m}$, así que J es $\mathfrak{m}$-primario y además $\mathfrak{m}^M = 0 \subset J$. Del teorema 3.26 se sigue que $\omega_R(J) \leq M$ y entonces $\Omega(R) \subset \mathbb{N}_M$. Lo anterior muestra que $\mathbb{N}_{M-1} \subset \Omega(R) \subset \mathbb{N}_M$, por lo que $\Omega(R) = \mathbb{N}_{M-1}$ o bien $\Omega(R) = \mathbb{N}_M$.

Si R es artiniano, por [3, Teorema 8.7, p.100], se tiene que $R = R_1 \times \cdots \times R_k$, donde $k \in \mathbb{N}$ y R_j es un anillo artiniano local. Por lo demostrado anteriormente, para cada $j = 1, \ldots, k$ existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $\Omega(R_j) = \mathbb{N}_{n_j}$. Afirmamos que $\Omega(R) = \mathbb{N}_n$, donde $n = n_1 + \cdots + n_k$. Si $J = J_1 \times \cdots \times J_k$ es un ideal propio de R, por el corolario 3.39 tenemos que

$$\omega_R(J) = \omega_{R_1}(J_1) + \cdots + \omega_{R_k}(J_k) \leq n_1 + \cdots + n_k = n,$$

de donde $\omega_R(J) \in \mathbb{N}_n$. Para ver la otra contención, dado $m \in \mathbb{N}_n$ existen $l \in \mathbb{N}_{k-1}$ y $t \in \mathbb{N}$, con $t \leq l + 1$, tales que

$$m = n_1 + \cdots + n_l + t,$$

así como ideales propios I_j de R_j, $j = 1, \ldots, l+1$, tales que $\omega_{R_j}(I_j) = n_j$ si $j = 1, \ldots, l$, y $\omega_{R_{l+1}}(I_{l+1}) = t$. De esta manera el ideal propio $I = I_1 \times \cdots \times I_{l+1} \times R_{l+2} \times \cdots \times R_k$ de R es tal que $\omega_R(I) = m$, por lo cual $m \in \Omega(R)$.

9. Si R es noetheriano entonces, por el teorema 3.62, todo ideal propio de R es n-absorbente para algún $n \in \mathbb{N}$, de donde $\Omega(R) \subset \mathbb{N}$. Ahora, dado $n \in \mathbb{N}$ por el lema 3.68 existe $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ tal que $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$ y por el lema 3.16 se tiene que $\omega(\mathfrak{m}^n) = n$, de donde $\mathbb{N} \subset \Omega(R)$.

10. Supongamos primero que R es un dominio de valuación discreta. Sea $\mathfrak{m}$ su único ideal maximal. Dado que R es dominio de valuación discreta es noetheriano, así que si se tuviera $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n\mathfrak{m}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ el lema de Nakayama implicaría $\mathfrak{m}^n = 0$ y por tanto $\mathfrak{m} = 0$; es decir, R es campo lo cual es una contradicción. Se sigue que $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, si I es un ideal propio de R entonces $I = \mathfrak{m}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $\omega(I) = \omega(\mathfrak{m}^n) = n \in \mathbb{N}$, lo que muestra que $\Omega(R) \subset \mathbb{N}$. La otra contención es clara, pues si $N \in \mathbb{N}$ entonces $\mathfrak{m}^N$ es un ideal propio de R con $\omega\left(\mathfrak{m}^N\right) = N$ y así $N \in \Omega(R)$.
    Supongamos ahora que R no es dominio de valuación discreta.
    a) Si todo ideal primo de R es idempotente veamos que $\Omega(R) = \{1, \infty\}$. Dado un ideal propio I de R se tienen dos casos

a) I es ideal primo. En este caso $\omega_R(I) = 1$.

b) I no es ideal primo. En este caso en particular se tiene que $I \neq 0$. Si I fuese n-absorbente para algún $n \in \mathbb{N}$ por el teorema 3.65 se tendría que $I = \mathfrak{p}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq m \leq n$ y algún $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Dado que $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$ y entonces $I = \mathfrak{p}$ lo cual es una contradicción. Se sigue que $\omega_R(I) = \infty$.

De los casos anteriores se concluye que $\Omega(R) \subset \{0, \infty\}$. Para ver la otra contención observe primero que $1 \in \Omega(R)$ pues si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ es arbitrario entonces $\omega_R(I) = 1$. Si suponemos que todo ideal propio de R es n-absorbente para algún $n \in \mathbb{N}$, del teorema 3.65 se tendría que todo ideal propio de R es una potencia de un primo y por hipótesis se concluye que todo ideal propio de R es ideal primo, por lo que R es campo, lo cual es una contradicción. Existe entonces un ideal propio J de R tal que $\omega_R(J) = \infty$.

b) Supongamos que existe $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ tal que $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}$. Para mostrar que en este caso $\Omega(R) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sólo hace falta ver que $\mathbb{N} \cup \{\infty\} \subset \Omega(R)$ pues la otra contención siempre es cierta. Como $\mathfrak{p}^2 \subsetneq \mathfrak{p}$ se sigue que $\mathfrak{p}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{p}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $N \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{p}^N$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario de (teorema A.6 inciso 2) y por el teorema 3.26 se tiene que $\omega_R\left(\mathfrak{p}^N\right) = N$ y así $N \in \Omega(R)$. Si suponemos que todo ideal propio de R es n-absorbente para algún $n \in \mathbb{N}$, del teorema 3.65 se tiene que todo ideal propio de R es una potencia de su radical y entonces, del corolario A.12, R es un dominio de valuación discreta, lo cual no es posible. Existe así un ideal propio J de R tal que $\omega_R(J) = \infty$, de donde $\infty \in \Omega(R)$.

□

Las contenciones del teorema anterior pueden ser estrictas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16.

1.

i) Si $R = k[[x]]$, donde k es un campo, entonces R es local con único ideal maximal $\mathfrak{m} = xk[[x]]$, así que $|\operatorname{Max}(R)| = 1$. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$, por lo que $n = \omega_R(\mathfrak{m}^n) \in \Omega(R) \setminus \{1\}$ para todo $n \geq 2$.

ii) Si $R = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$ es claro que $|\mathrm{Max}(R)| = \infty$. En el ejemplo 2 se mostró que el ideal propio

$$I = \{(x_i) \in R : x_{2i-1} = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$$

de R es tal que $\omega_R(I) = \infty$, de donde $\mathbb{N} \subsetneq \Omega(R)$.

2. Si $R = \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$ primo positivo y $n \in \mathbb{N}$ entonces, por los incisos 1 y 3 del ejemplo 15 y el inciso 2 del teorema anterior, $\Omega(\mathbb{Z}_{p^n}) = \mathbb{N}_n \subsetneq \mathbb{N} = \Omega(\mathbb{Z})$.

3. Sea R cualquier anillo artiniano. Por el inciso 8 del teorema anterior $\Omega(R)$ es finito. Por otro lado R es noetheriano y $\dim(R) = 0$, así que $R[x]$ es noetheriano y $\dim(R[x]) = 1$ ([14, teorema 15.4, p.117]), así que $\Omega(R[x]) = \mathbb{N}$ por el inciso 9 del teorema anterior. Note que si R es noetheriano con $\dim(R) \geq 1$ entonces $R[x]$ es noetheriano con $\dim(R[x]) \geq 2$ y por el inciso 9 del teorema anterior se tiene que $\Omega(R) = \mathbb{N} = \Omega(R[x])$.

5. Sean $R = \mathbb{Z}$ y $M = \mathbb{Q}$. Por el ejemplo 11, el ideal propio $I = 0(+)2\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Q}$ es tal que $\omega_{\mathbb{Z}(+)\mathbb{Q}}(I) = \infty \notin \mathbb{N} = \Omega(\mathbb{Z})$, de donde $\Omega(\mathbb{Z}) \subsetneq \Omega(\mathbb{Z}(+)\mathbb{Q})$.

6. Si $R = \mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[[x]]$ es subanillo de $T = \mathbb{Q} + x\mathbb{Q}[[x]]$ entonces, por el inciso 2 del ejemplo 12, el ideal propio $I = xR = \mathbb{Z}x + x^2\mathbb{Q}[[x]]$ de R es tal que $\omega_R(I) = \infty \notin \mathbb{N} = \Omega(\mathbb{Z})$, por lo que $\Omega(\mathbb{Z}) \subsetneq \Omega(\mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[[x]])$.

Capítulo 4

Otros tipos de absorbencia

Además de la n-absorbencia se han estudiado otros tipos de absorbencia, como la absorbencia fuerte, la cual será estudiada brevemente en la siguiente sección. En la última sección de este capítulo se definirá el concepto de ideal rad-2-absorbente (denotado por rad-$2ab$), el cual no ha sido estudiado previamente, hasta donde nos es conocido.

4.1. Ideales fuertemente n-absorbentes

En esta sección del se estudiará el concepto de ideal fuertemente n-absorbente, donde $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.1. Decimos que un ideal propio I del anillo R es un ideal *fuertemente n-absorbente* si cada que $I_1, \ldots, I_{n+1}$ sean ideales de R tales que $I_1 \cdots I_{n+1} \subset I$, se cumple que $I_1 \cdots \widehat{I_j} \cdots I_{n+1} \subset I$ para algún $j \in \mathbb{N}_{n+1}$.

Algunas observaciones importantes son las siguientes.

Observación 9.

1. Un ideal es fuertemente 1-absorbente si y solo si es un ideal primo.

2. Si I es un ideal fuertemente n-absorbente e $I_1 \cdots I_m \subset I$ para ideales $I_1, \ldots, I_m$ de R con $m > n$, de manera análoga al caso de los ideales n-absorbentes se puede mostrar que $I_{j_1} \cdots I_{j_n} \subset I$ para algunos $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}_m$ distintos. En tal caso, supondremos siempre que $I_1 \cdots I_n \subset I$.

En el primer resultado de esta sección es el siguiente.

Teorema 4.2. Sea R un anillo.

1. Si I es un ideal fuertemente n-absorbente de R entonces I es ideal n-absorbente.

2. Si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(R)$ entonces $I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$ es ideal fuertemente n-absorbente.

Demostración.

1. Sean $a_1, \ldots, a_{n+1} \in R$ tales que $a_1 \cdots a_{n+1} \in I$. Para cada $j = 1, \ldots, n+1$, sea $I_j = (a_1)$. Tenemos entonces que $I_1 \cdots I_{n+1} \subset I$ y como I es fuertemente n-absorbente $I_1 \cdots I_n \subset I$ y por tanto $a_1 \cdots a_{n+1} \in I$.

2. Si $I_1, \ldots, I_{n+1}$ son ideales de R tales que $I_1 \cdots I_{n+1} \subset I$ entonces, por el teorema 1.11, para cada $l = 1, \ldots, n$, existe $j_l \in \mathbb{N}_{n+1}$ tal que $I_{j_l} \subset \mathfrak{p}_l$, de donde
$$I_{j_1} \cdots I_{j_n} \subset I_{j_1} \cap \cdots \cap I_{j_n} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n = I.$$

□

De manera análoga al caso de los ideales n-absorbentes, si I es un ideal fuertemente m-absorbente para algún $m \in \mathbb{N}$, podemos definir

$$\omega_R^*(I) = \text{mín}\left\{n \in \mathbb{N} : \ I \text{ es ideal fuertemente } n\text{-absorbente de } R\right\},$$

en caso de que I no sea fuertemente m-absorbente para ningún $m \in \mathbb{N}$ definimos $\omega_R^*(I) = \infty$. Si definimos además $\omega_R^*(R) = 0$ se tiene que $\omega_R^*(I) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ para cualquier ideal I de R.
Se define también $\Omega^*(R) = \{\omega_R^*(I) : I \text{ es ideal propio de } R\}$.

Los ideales fuertemente n-absorbentes tienen propiedades análogas a las de los ideales n-absorbentes y por tanto hay afirmaciones para ω_R^* análogas a las de ω_R, sin embargo, solo mostraremos la siguiente.

Teorema 4.3. Supongamos que I_j es ideal fuertemente n_j-absorbente de R para todo $j = 1, \ldots, m$. Si $n = n_1 + \cdots + n_m$ entonces $I = I_1 \cap \cdots \cap I_m$ es ideal fuertemente n-absorbente de R. Consecuentemente

$$\omega_R^*(I) \leq \omega_R^*\left(I_1\right) + \cdots + \omega_R^*\left(I_m\right).$$

Demostración. Sean $J_1, \ldots, J_{n+1}$ ideales de R tales que $J_1 \cdots J_{n+1} \subset I = I_1 \cap \cdots \cap I_m$. Dado que I_j es fuertemente n_j-absorbente, para cada $j =$

$1, \ldots, m$, existen $J_{l_1}, \ldots, J_{l_{n_j}}$ tales que $J_{l_1} \cdots J_{l_{n_j}} \subset I_j$. Definimos $A_j = \left\{J_{l_1}, \ldots, J_{l_{n_j}}\right\}$, $j = 1, \ldots, m$, y $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$. Observe que $|A_j| \leq n_j$, $|A| \leq n$ y además $\prod_{J \in A} J \subset I$. $\square$

Como ya se ha mencionado en el capítulo 2, un ideal I de un anillo R es primo si y solo si para cada par de ideales I_1, I_2 de R tales que $I_1 I_2 \subset I$, se cumple $I_1 \subset I$ o $I_2 \subset I$; en el teorema 2.20 se mostró que I es ideal 2-absorbente de R si y solo si $I_1 I_2 I_3 \subset I$, con I_1, I_2, I_3 ideales de R, implica que $I_1 I_2 \subset I$ o $I_1 I_3 \subset I$ o $I_2 I_3 \subset I$; es decir, los conceptos de n-absorbencia y fuertemente n-absorbencia coinciden para los casos $n = 1, 2$, mientras que, en general, la fuertemente n-absorbencia implica n-absorbencia (teorema 4.2). Estos hechos refuerzan la siguiente conjetura.

Conjetura 1. Sean R un anillo y $n \in \mathbb{N}$. Un ideal propio I de R es fuertemente n-absorbente si y solo si I es ideal n-absorbente; es decir, $\omega_R(I) = \omega_R^*(I)$ y por tanto $\Omega(R) = \Omega^*(R)$.

Por otro lado, en el teorema 2.12 se mostró que si un ideal I es 2-absorbente entonces $\left(\sqrt{I}\right)^2 \subset I$. La afirmación análoga a los ideales 1-absorbentes (los ideales primos) es trivialmente cierta. Esto nos lleva a la siguiente conjetura.

Conjetura 2. Sean R un anillo y $n \in \mathbb{N}$. Si I es un ideal n-absorbente de R entonces $\left(\sqrt{I}\right)^n \subset I$.

Mostraremos ahora que la conjetura 1 implica la conjetura 2, esto es justamente el siguiente teorema.

Teorema 4.4. Si $n \in \mathbb{N}$ e I es un ideal fuertemente n-absorbente de R entonces $\left(\sqrt{I}\right)^n \subset I$.

Demostración. Supongamos que $n \geq 2$. Sean $a_1, \ldots, a_n \in \sqrt{I}$ y sea $J = (a_1 \cdots a_n) \subset \sqrt{I}$. Del inciso 3 del teorema 3.3 se tiene que $a_i^n \in I$. Vamos a ver que $J^{n^n} \subset I$ mostrando que cada generador de J^{n^n} pertenece a I. Un generador típico de J^{n^n} tiene la forma $a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n}$, donde $m_1 + \cdots + m_n = n^n$. Observe que no puede darse que $m_j < n$ para todo j pues en ese caso $\sum_{j=1}^{n} m_j < n^2 \leq n^n$, lo cual es una contradicción. Se tiene entonces que $m_i \geq n$ para algún i y así $a_1^{m_1} \cdots a_i^{m_i} \cdots a_n^{m_n} \in I$. Esto muestra que $J^{n^n} \subset I$ y como I es fuertemente n-absorbente se sigue que $J^n \subset I$. $\square$

Los tres resultados que siguen son algunas consecuencias que se tendrían si la conjetura 1 y la conjetura 2 resultaran ser ciertas.

Teorema 4.5. Sean $n \in \mathbb{N}$ e I un ideal fuertemente n-absorbente de un anillo R tal que $\operatorname{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$ con $m \leq n$. Se tiene que $\mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{n_m} \subset I$ para algunos $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 + \cdots + n_m = n$. De manera particular, si $\sqrt{I} = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ entonces $\mathfrak{p}^n \subset I$.

Demostración. Sea $J = \sqrt{I}$. Se tiene entonces que $J = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m$ y por el teorema 4.4

$$\mathfrak{p}_1^n \cdots \mathfrak{p}_m^n = (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_m)^n \subset (\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m)^n = J^n \subset I$$

y dado que I es fuertemente n-absorbente existen $n_1, \ldots, n_m \geq 0$ tales que $n_1 + \cdots + n_m = n$ y $\mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{n_m} \subset I$. Si para algún $i \in \mathbb{N}_m$ se tuviera que $n_i = 0$ se tendría que $\mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \widehat{\mathfrak{p}_i} \cdots \mathfrak{p}_m^{n_m} \subset I \subset \mathfrak{p}_i$ y así $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}_i$ para algún $j \neq i$, lo cual no puede ocurrir, por lo que $n_i \geq 1$ para todo $i = 1, \ldots, m$.
Si $\sqrt{I} = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ entonces $\operatorname{Min}_R(I) = \{\mathfrak{p}\}$ y de la primera parte se sigue que $\mathfrak{p}^n \subset I$. □

El teorema anterior extiende al teorema 3.23 y se cumple para ideales n-absorbentes si la conjetura 1 es cierta.

Teorema 4.6. Sean $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que la conjetura 2 es cierta.

1. Si $\mathfrak{p}^n$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario de R y $\mathfrak{p}^n \subsetneq \mathfrak{p}^{n-1}$ entonces $\omega(\mathfrak{p}^n) = n$.

2. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(R)$ y $\mathfrak{p}^n \subsetneq \mathfrak{p}^{n-1}$ entonces $\omega(\mathfrak{p}^n) = n$.

3. Sea I un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R. Si $\mathfrak{p}^n \subset I$ y $\mathfrak{p}^{n-1} \not\subset I$ entonces $\omega(I) = n$.

Demostración.

1. Del teorema 3.26 ya tenemos que $\omega(\mathfrak{p}^n) \leq n$. Si $\omega(\mathfrak{p}^n) \leq n-1$ entonces $\mathfrak{p}^n$ es m-absorbente para algún $m \leq n-1$ así que por la conjetura 2 se tendría que $\mathfrak{p}^m = \left(\sqrt{\mathfrak{p}^n}\right)^m \subset \mathfrak{p}^n$ y entonces $\mathfrak{p}^{n-1} \subset \mathfrak{p}^n$, de donde $\mathfrak{p}^n \subsetneq \mathfrak{p}^{n-1} \subset \mathfrak{p}^n$ lo cual no puede ocurrir. Se sigue que $\omega(\mathfrak{p}^n) \geq n$ y por tanto $\omega(\mathfrak{p}^n) = n$.

2. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(R)$ entonces $\mathfrak{p}^n$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario de R y como $\mathfrak{p}^n \subsetneq \mathfrak{p}^{n-1}$, por el inciso anterior, se tiene que $\omega(\mathfrak{p}^n) = n$.

3. Como I es ideal $\mathfrak{p}$-primario y $\mathfrak{p}^n \subset I$ entonces $\omega(I) \leq n$ (teorema 3.26). Como en el inciso anterior, si $\omega(I) \leq m$ para algún $m \leq n-1$, de la conjetura 2 se tendría $\mathfrak{p}^{n-1} \subset \mathfrak{p}^m = \left(\sqrt{I}\right)^m \subset I$, lo cual es una contradicción. Se tiene así que $n \geq \omega(I) \geq n$, es decir, $\omega(I) = n$.

$\square$

Observación 10.

1. El teorema anterior mejora la condición para $\omega\left(\mathfrak{p}^n\right) = n$ de $\mathfrak{p}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{p}^n$ a $\mathfrak{p}^n \subsetneq \mathfrak{p}^{n-1}$ expresadas en el lema 3.16 y en los teoremas 3.26 y 3.30.

2. Si $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal de un anillo local R con $\dim(R) = 0$ tal que $\mathfrak{m}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{m}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la conjetura 2 es cierta entonces $\omega(0) = \infty$. En efecto, dado que $\dim(R) = 0$ y $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de R entonces $\sqrt{0} = \mathfrak{m}$. Si 0 fuese ideal m-absorbente para algún $m \in \mathbb{N}$ de la conjetura 2 se tendría $\mathfrak{m}^m = \left(\sqrt{0}\right)^m \subset 0$, de donde $\mathfrak{m}^m = 0$ lo cual no puede ocurrir. Esto muestra que $\omega(0) = \infty$.

Teorema 4.7. Sean $n \in \mathbb{N}$ y R un anillo tal que el ideal trivial 0 es fuertemente n-absorbente. Todo ideal propio de R es n-absorbente si y solo si existen $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, anillos locales $R_1, \ldots, R_m$ con ideales maximales $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_m$ respectivamente, así como $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 + \cdots + n_m = n$ y $\mathfrak{m}_i^{n_i} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

Demostración. Supongamos que todo ideal propio de R es n-absorbente. Por el teorema 3.67 se tiene que $\dim(R) = 0$ y R tiene exactamente m ideales maximales, para algún $m \leq n$, digamos $\operatorname{Max}(R) = \{M_1, \ldots, M_m\}$. Dado que 0 es fuertemente n- absorbente, es n absorbente y $\operatorname{Min}_R(0) = \{M_1, \ldots, M_m\}$. Del teorema 4.5 se tiene que $M_1^{n_1} \cdots M_m^{n_m} = 0$ para algunos $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 + \cdots + n_m = n$. Para cada $j = 1, \ldots, m$, sea $R_j = R/M_j^{n_j}$. Note que R_j es anillo local con único ideal maximal $\mathfrak{m}_j = \overline{M_j}$ y además $\mathfrak{m}_j^{n_j} = \overline{M_j^{n_j}} = 0$. Por otro lado, por el corolario 1.22 se tiene que $M_i^{n_i} + M_j^{n_j} = R$ y del corolario 1.24 se tiene $R/\bigcap_{i=1}^{m} M_i^{n_i} \cong R_1 \times \cdots \times R_m$, pero $\bigcap_{i=1}^{m} M_i^{n_i} = \prod_{i=1}^{m} M_i^{n_i} = 0$, de donde $R \cong R_1 \times \cdots \times R_m$.

Supongamos ahora que $R \cong T = R_1 \times \cdots \times R_m$ donde $m \leq n$, R_i es anillo local con único ideal maximal $\mathfrak{m}_i$ y $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ son tales que $n_1 + \cdots + n_m = n$ y $\mathfrak{m}_i^{n_i} = 0$. Dado $i \in \mathbb{N}_m$ y un ideal propio J de R_i, $\mathfrak{m}_i^{n_i} = 0 \subset J \subset \mathfrak{m}_i$ y entonces $\sqrt{J} = \mathfrak{m}_i$ por lo que J es ideal $\mathfrak{m}_i$-primario y como

$\mathfrak{m}_i^{n_i} \subset J$ del teorema 3.26 se sigue que $\omega_{R_i}(J) \leq n_i$. Como además $\omega_{R_i}(R_i) = 0 \leq n_i$ se sigue que $\omega_{R_i}(J) \leq n_i$ para todo ideal de R_i. Si $J_1 \times \cdots \times J_m$ es un ideal propio de T entonces, por el corolario 3.39, $\omega_T(J_1 \times \cdots \times J_m) = \omega_{R_1}(J_1) + \cdots + \omega_{R_m}(J_m) \leq n_1 + \cdots + n_m = n$; es decir, todo ideal propio de T es n-absorbente y por tanto todo ideal propio de R es también n-absorbente (teorema 3.8, inciso 2). □

El siguiente teorema, el último de esta sección, proporciona un caso en el que los conceptos de fuertemente n-absorbencia y n-absorbencia coinciden.

Teorema 4.8. Sean I un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R y $n \in \mathbb{N}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. I es ideal n-absorbente de R y $\mathfrak{p}^n \subset I$.
2. I es ideal fuertemente n-absorbente de R.

En particular, si $\mathfrak{p}^n$ es $\mathfrak{p}$-primario entonces $\mathfrak{p}^n$ es fuertemente n-absorbente.

Demostración.

1.⇒2. Sean $I_1, \ldots, I_{n+1}$ ideales de R tales que $I_1 \cdots I_{n+1} \subset I$ y supongamos que $I_1 \cdots \widehat{I_j} \cdots I_{n+1} \not\subset I$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Si $I_j \not\subset \mathfrak{p}$ para algún j existiría $b \in I_j$ tal que $b \notin \mathfrak{p} = \sqrt{I}$. Para todo $a_i \in I_i$, $i \neq j$, se tiene que $a_1 \cdots b \cdots a_{n+1} \in I_1 \cdots I_j \cdots I_{n+1} \subset I$, como $b \notin \mathfrak{p} = \sqrt{I}$ e I es $\mathfrak{p}$-primario se sigue que $a_1 \cdots \widehat{b} \cdots a_{n+1}$ y así $I_1 \cdots \widehat{I_j} \cdots I_{n+1} \subset I$ lo cual es una contradicción. Se sigue que $I_j \subset \mathfrak{p}$ para todo $j = 1, \ldots, n+1$, pero entonces $I_1 \cdots I_n \subset \mathfrak{p}^n \subset I$ que es una contradicción.

2.⇒1. Es claro por el teorema 4.5 (también por el teorema 4.2).

Si $\mathfrak{p}^n$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario entonces, por el teorema 3.26, $\mathfrak{p}^n$ es n-absorbente y por la afirmación 1.⇒2. mostrada anteriormente se tiene que $\mathfrak{p}^n$ es fuertemente n-absorbente. □

Observe que en el inciso 1 del teorema anterior, la hipótesis de que I es ideal n-absorbente es redundante por el teorema 3.26.

El teorema anterior tiene algunas consecuencias interesantes.

Corolario 4.9. Si $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n \in \mathrm{Max}(R)$ entonces $I = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$ es ideal fuertemente n-absorbente de R.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_m \in \operatorname{Max}(R)$ son todos distintos de R y $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ son tales que $n_1 + \cdots + n_m = n$. Veamos que $I = \mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_m^{n_m}$ es ideal fuertemente n-absorbente de R. Dado que $\mathfrak{m}_j^{n_j}$ es $\mathfrak{m}_j$-primario y $\mathfrak{m}_j^{n_j} \subset \mathfrak{m}_j$ se tiene que $\mathfrak{m}_j$ es ideal n-absorbente y del teorema anterior se tiene que $\mathfrak{m}_j$ es ideal fuertemente n_j-absorbente. Ahora bien, dado que $\mathfrak{m}_i^{n_i} + \mathfrak{m}_j^{n_j} = R$ para todo $j \neq i$ entonces $I = \mathfrak{m}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{m}_m^{n_m} = \mathfrak{m}_1^{n_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_m^{n_m}$ y del teorema 4.3 se tiene el resultado. □

Corolario 4.10. Si R es un anillo noetheriano entonces todo ideal propio de R es fuertemente n-absorbente para algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R, dado que $\mathfrak{p}^m \subset \mathfrak{q}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathfrak{q}$ es ideal m-absorbente y por el teorema 4.8, $\mathfrak{q}$ es ideal fuertemente n-absorbente. Para terminar, si I es un ideal propio de R entonces $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$, donde $\mathfrak{q}_j$ es $\mathfrak{p}_j$-primario y por tanto fuertemente n_j-absorbente para algún $n_j \in \mathbb{N}$. La conclusión es clara del teorema 4.3. □

Corolario 4.11. Sean R un dominio de Prüfer y $n \in \mathbb{N}$. Un ideal propio I de R es ideal fuertemente n-absorbente de R si y solo si I es ideal n-absorbente de R, más aún $\omega(I) = \omega^*(I)$.

Demostración. Una implicación ya se tiene aún no siendo el anillo un dominio de Prüfer. Como en el teorema 3.66 podemos suponer que $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k}$ donde $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ son primos incomparables, $n_1, \ldots, \mathfrak{n}_k \in \mathbb{N}$ son tales que $n_i = 1$ si $\mathfrak{p}_i$ es idempotente y $n_1 + \cdots + n_k = n$. Como $\mathfrak{p}_i^{n_i} + \mathfrak{p}_j^{n_j} = R$ si $i \neq j$ entonces $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k^{n_k}$ y dado que $\mathfrak{p}_j^{n_j}$ es ideal $\mathfrak{p}_j$-primario (proposición A.19 inciso 2) entonces $\mathfrak{p}_j^{n_j}$ es ideal n_j-absorbente (teorema 3.26); del teorema 4.8 se tiene que $\mathfrak{p}_j^{n_j}$ es fuertemente n_j-absorbente y del teorema 4.3 se tiene que I es ideal fuertemente n-absorbente.
Supongamos ahora que $\omega(I) = n$, $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k}$ como en el párrafo anterior. Ya se tiene que $\omega(I) \leq \omega^*(I)$ y de los teoremas 4.3 y 3.66 tenemos que

$$\omega^*(I) = \omega^*\left(\mathfrak{p}_1^{n_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k^{n_k}\right) \leq \omega^*\left(\mathfrak{p}_1^{n_1}\right) + \cdots + \omega^*\left(\mathfrak{p}_k^{n_k}\right) \leq n = \omega(I).$$

□

El corolario anterior muestra que los conceptos de n-absorbencia y fuertemente n-absorbencia coinciden en la clase de los dominios de Prüfer.

Como en la conjetura de la sección 3.2, avances recientes y soluciones parciales a las conjeturas 1 y 2 de esta sección pueden encontrarse en [6], [7], [8] y [12].

4.2. Ideales rad-$2ab$

En el capítulo 2 se mostró que si un ideal I es 2-absorbente entonces $x \in \sqrt{I}$ implica que $x^2 \in I$. Una pregunta natural que puede hacerse es si los ideales 2-absorbentes son los únicos que satisfacen esta propiedad; es decir, si I es un ideal tal que $x^2 \in I$ para todo $x \in \sqrt{I}$ ¿es necesariamente I un ideal 2-absorbente? Para contestar esta pregunta consideremos $R = \mathbb{Z}$ e $I = 2^2 3^2 5^2 \mathbb{Z}$, observe ahora que $\sqrt{I} = (2 \cdot 3 \cdot 5)\,\mathbb{Z}$ y así, si $x \in \sqrt{I}$ entonces $x = 2 \cdot 3 \cdot 5y$ para algún $y \in \mathbb{Z}$, de donde $x^2 = 2^2 3^2 5^2 y^2 \in I$ pero I no es ideal 2-absorbente por la proposición 2.3. Este hecho ha motivado la definición de nuevos ideales que satisfagan la condición pedida y en el presente capítulo se hará un pequeño estudio de estos ideales llamados *ideales rad-2ab* que además son un generalización de los ideales 2-absorbentes. Hasta el momento no se tiene conocimiento de bibliografía en donde se haga referencia a estos ideales, por lo que suponemos que los resultados aquí presentados son originales.

Definición 4.12. Un ideal propio I de un anillo R se dice que es un *ideal* rad-$2ab$ si para todo $x \in \sqrt{I}$ se tiene que $x^2 \in I$.

Ejemplo 17.

1. Todo ideal 2-absorbente es ideal rad-$2ab$.

2. Todo ideal radical es ideal rad-$2ab$ pues si $x \in \sqrt{I} = I$ entonces $x^2 \in I$. En particular todo ideal primo es ideal rad-$2ab$.

3. Ya se ha mostrado que el ideal $I = 2^2 3^2 5^2 \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ es ideal rad-$2ab$

El siguiente par de resultados generalizan las propiedades ya establecidas anteriormente para los ideales n-absorbentes, donde $n \geq 1$.

Teorema 4.13. Sea $f : R \longrightarrow T$ un morfismo de anillos.

1. Si J es un ideal rad-$2ab$ de T entonces $f^{-1}(J)$ es un ideal rad-$2ab$ de R.

2. Si además f es suprayectivo e I es un ideal rad-$2ab$ de R tal que $\ker f \subset I$ entonces $f(I)$ es un ideal rad-$2ab$ de T.

Demostración.

1. Se sabe que $\sqrt{f^{-1}(J)} = f^{-1}\left(\sqrt{J}\right)$, así que dado $x \in \sqrt{f^{-1}(J)}$ se tiene que $f(x) \in \sqrt{J}$, y como J es ideal rad-$2ab$ esto implica que $f\left(x^2\right) = (f(x))^2 \in J$; es decir, $x^2 \in f^{-1}(J)$, lo que muestra que $f^{-1}(J)$ es ideal rad-$2ab$ de R.

2. Sea $y \in \sqrt{f(I)}$. Se tiene entonces que $y^n = f(a)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y para algún $a \in I$, como además f es suprayectivo existe $x \in R$ tal que $f(x) = y$, se sigue que $f(x^n) = (f(x))^n = y^n = f(a)$. Con esto $x^n - a \in \ker f \subset I$ y por tanto $x^n \in I$ pues $a \in I$, de aquí que $x \in \sqrt{I}$ luego, dado que I es ideal *rad*-2*ab*, $x^2 \in I$ y entonces $y^2 = (f(x))^2 = f(x^2) \in f(I)$, que era lo que queríamos probar.

$\square$

Teorema 4.14. Sean R un anillo y $S \subset R$ un sistema multiplicativo. Si I es un ideal *rad*-2*ab* de R tal que $I \cap S = \emptyset$ entonces $S^{-1}I$ es un ideal *rad*-2*ab* de $S^{-1}R$.

Demostración. Como $I \cap S = \emptyset$ entonces $S^{-1}I$ es un ideal propio de R y dado que $\sqrt{S^{-1}I} = S^{-1}\sqrt{I}$, si $\frac{x}{y} \in \sqrt{S^{-1}I}$ entonces existe $u \in S$ tal que $ux \in \sqrt{I}$, por lo que $u^2x^2 = (ux)^2 \in I$. Como $u \in S$ se sigue que $u^2 \in S$ y la relación $u^2x^2 \in I$ implica que $\left(\frac{x}{y}\right)^2 \in S^{-1}I$. $\square$

Mostraremos ahora que el producto y la intersección de dos ideales primos son ideales *rad*-2*ab*, antes mostraremos un hecho un poco más general.

Lema 4.15. Si I, J son dos ideales *rad*-2*ab* del anillo R entonces $I \cap J$ es ideal *rad*-2*ab* de R.

Demostración. Sea $x \in R$ tal que $x \in \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Como I, J son ideales *rad*-2*ab* la relación anterior implica que $x^2 \in I \cap J$, lo que muestra que $I \cap J$ es ideal *rad*-2*ab* de R. $\square$

Proposición 4.16. Sea R un anillo y sean $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec}(R)$ no necesariamente distintos. Si $I = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ y $J = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ entonces I, J son ideales *rad*-2*ab* de R.

Demostración. Que J sea ideal *rad*-2*ab* viene del lema anterior y del hecho de que cada ideal primo es radical. Veamos que I es ideal *rad*-2*ab*. Si $x \in R$ es tal que $x \in \sqrt{I} = \sqrt{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ entonces $x \in \mathfrak{p}_1$ y $x \in \mathfrak{p}_2$, de donde $x^2 \in \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 = I$. $\square$

El siguiente resultado muestra que el conductor de ciertos elementos en el complemento de un ideal primario y *rad*-2*ab* es también un ideal *rad*-2*ab*.

Teorema 4.17. Sea I un ideal primario y *rad*-2*ab* de un anillo R. Si $x \notin I$ entonces $(I :_R x)$ es ideal *rad*-2*ab*.

Demostración. Observe que $(I :_R x)$ es propio pues $x \notin I$. Si $y \in R$ es tal que $y \in \sqrt{(I :_R x)}$ entonces $y^n x \in I$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Dado que $x \notin I$ e I es ideal primario se sigue que $y^n \in \sqrt{I}$, el cual es un ideal primo de R y por tanto $y \in \sqrt{I}$. Con esto $y^2 \in I$ pues I es ideal *rad*-2*ab* y entonces $y^2 x \in I$; es decir, $y^2 \in (I :_R x)$. □

El siguiente teorema proporciona condiciones necesarias para que el conductor $(I :_R x)$ sea un ideal primo minimal sobre I.

Teorema 4.18. Sea I un ideal *rad*-2*ab* de un anillo R. Si $x \notin I$ y $(I :_R x) \in \operatorname{Spec}(R)$ entonces $(I :_R x) \in \operatorname{Min}_R(I)$.

Demostración. Sea $\mathfrak{p} = (I :_R x)$, donde $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Como $I \subset \mathfrak{p}$, por el corolario 1.38 existe $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min}_R(I)$ tal que $I \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Veamos que de hecho $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Si esto no ocurriera existiría $y \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$, de donde $yx \in I \subset \mathfrak{q}$. Como $\mathfrak{q}$ es ideal primo y $y \notin \mathfrak{q}$ entonces $x \subset \mathfrak{q} = (I :_R x)$ por lo que $x^2 \in I$; es decir, $x \in \sqrt{I}$ lo cual no puede ocurrir. □

Teorema 4.19. Sea I un ideal *rad*-2*ab* de R y supongamos que $\operatorname{Min}_R(I)$ es finito. Para cada $x \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}_R(I)} \mathfrak{p}$ se tiene que $(I : x)$ es ideal *rad*-2*ab* y $\sqrt{(I : x)} = \sqrt{I}$.

Demostración. Dados $x \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}_R(I)} \mathfrak{p}$ e $y \in \sqrt{(I : x)}$ se tiene que $y^m x \in I$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Como $I \subset \mathfrak{p}$ y $x \notin \mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}_R(I)$ entonces $y^m \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min}_R(I)} \mathfrak{p} = \sqrt{I}$, así $y \in \sqrt{I}$ y por tanto $y^2 \in I$. Lo anterior muestra que

1. $\sqrt{(I : x)} \subset \sqrt{I}$, de donde $\sqrt{(I : x)} = \sqrt{I}$, pues siempre se tiene que $I \subset (I : x)$.
2. $y^2 \in (I : x)$ para todo $y \in \sqrt{(I : x)}$, por lo que $(I : x)$ es *rad*-2*ab*.

□

Se tiene la siguiente consecuencia inmediata.

Corolario 4.20. Sea I un ideal *rad*-2*ab* de R. Si $\sqrt{I} = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ entonces para cada $x \notin \mathfrak{p}$ se tiene que $(I : x)$ es ideal *rad*-2*ab* y $\sqrt{(I : x)} = \mathfrak{p}$.

Lema 4.21. Sea R un anillo tal que 2 es una unidad de R. Si I es un ideal *rad*-2*ab* de R entonces $\left(\sqrt{I}\right)^2 \subset I$.

Demostración. Vamos a ver que que los generadores de $\left(\sqrt{I}\right)^2$ pertenecen a I. Sean $a, b \in \sqrt{I}$. Tenemos $a^2, b^2, (a+b)^2 \in I$, de donde $2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2 \in I$ y como 2 es unidad se concluye que $ab \in I$. $\square$

Proposición 4.22. Sea R un anillo tal que 2 es unidad y sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ tal que $I = \mathfrak{p}^m$ es ideal *rad*-2*ab*, donde $m \geq 3$. Se tiene que $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{n+1} = I$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Del lema previo se tiene que $\mathfrak{p}^2 = \left(\sqrt{I}\right)^2 \subset I = \mathfrak{p}^m$ y como $m \geq 3$ también se tiene que $\mathfrak{p}^m \subset \mathfrak{p}^2$, de donde $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}^m = I$. Más aún, se tiene que $\mathfrak{p}^k = \mathfrak{p}^2$ para todo $k = 3, \ldots, m$. De manera inductiva se tiene el resultado. $\square$

Con el resultado anterior damos por terminado este capítulo y el trabajo de tesis. Tenemos la certeza de que los resultados de esta última parte son originales y aún no han sido publicados, por lo que esto puede abrir un camino para futuros proyectos.

Apéndice A

Dominios de Prüfer y casi dominios de Dedekind

En este apéndice se realizará un estudio de los dominios de Püfer y casi dominios de Dedekind y se mostrarán los resultados necesarios para facilitar la lectura de la sección 3.3. Un estudio más extenso de los temas aquí presentados, así como de temas relacionados, puede encontrarse en [11] y [13].

A.1. Ideales invertibles

Comenzamos esta sección repasando algunas propiedades básicas de los ideales invertibles. Dichas propiedades son de gran utilidad para el desarrollo de las siguientes secciones. Dado un dominio entero R con campo de fracciones K, todo R-submódulo I de K para el cual existe $d \in R$, $d \neq 0$, tal que $dI \subset R$, es llamado *ideal fraccionario de* R. Es claro que todo ideal de R es ideal fraccionario. Para evitar confusiones, los ideales "ordinarios" de R, en algunas ocasiones, son llamados *ideales enteros*. Si I, J son ideales fraccionarios de R su suma y su producto se definen a continuación.

- Suma: $I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$.
- Producto: $IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J \right\}$.

Es claro además que $[I : J] := \{x \in K : xJ \subset I\}$ es un R-módulo y que $[I : J]$ es un ideal fraccionario.
Un ideal fraccionario I de R es *invertible* si existe un ideal fraccionario J

de R tal que $JI = R$. Si un ideal fraccionario I es invertible, su inverso es único y coincide con $[R : I]$.

Observación 11. Sean R es un dominio entero e I un ideal de R.

1. Si $I = (x)$, $x \neq 0$, entonces I es invertible con inverso $I^{-1} = x^{-1}R$.
2. Si $J_1, \ldots, J_n$ son ideales fraccionarios invertibles de R entonces $J = J_1 \cdots J_n$ es invertible si y solo si $J_1, \ldots, J_n$ son invertibles. En tal caso $J^{-1} = J_1^{-1} \cdots J_n^{-1}$.

Proposición A.1. Sea R un dominio entero con campo de cocientes K.

1. Si I es un ideal invertible de R entonces I es no nulo y es finitamente generado como R-módulo.
2. Si I, J son dos ideales fraccionarios de R tales que $I \subset J$ y J es invertible entonces existe un ideal entero C de R tal que $I = JC$.
3. Un ideal fraccionario I de R es invertible si y solo si existe un ideal fraccionario J de R tal que IJ es principal con generador una unidad de K.

Demostración.

1. Como I es invertible existe un ideal fraccionario J de R tal que $IJ = R$, por lo que $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in I, b_i \in J$. Para cada $x \in I$ se tiene que $xb_i \in R$ y así $x = \sum_{i=1}^{n} a_i (xb_i)$; es decir, $a_1, \ldots, a_n$ generan a I como R-módulo. Ahora bien, como J es ideal fraccionario, existe $d \in R$, $d \neq 0$, tal que $dJ \subset R$, de donde $d \in dR = dIJ \subset IR = I$, por lo que $I \neq 0$.
2. Como J es invertible existe un ideal fraccionario B de R tal que $JB = R$, de donde $I = JIB$. Si $C = IB$ entonces $C \subset R$ pues $I \subset J$ por lo que C es entero, además $JC = JIB = I$.
3. Si $x \in K$ es una unidad y J es un ideal fraccionario de R tal que $IJ = (x)$ entonces $I\left(x^{-1}J\right) = R$, por lo que $I\left(x^{-1}J\right)$ es invertible y por tanto I es invertible. Recíprocamente, si J es invertible entonces $JG = R$ para algún ideal fraccionario G de R. Dado que G es también invertible, por el inciso 1 se tiene que es finitamente generado, así que podemos escribirlo en la forma $G = \frac{1}{u}B$ para algún ideal entero B de R y algún $u \in R \setminus \{0\}$. Se sigue que $J\left(\frac{1}{u}B\right) = R$, de donde $JB = uR$.

□

A.2. Anillos de valuación

En esta sección daremos algunas propiedades que satisfacen los anillos de valuación. Se presentarán una serie de resultados que serán útiles en las pruebas de los resultados del resto de este capítulo así como en las de algunos de la sección 3.3.

Como ya se mencionó en la sección 3.1 un dominio entero R es un anillo de valuación si para todos $x, y \in R$, $x, y \neq 0$ se tiene que $x|y$ o $y|x$ (en R). Es claro que esto es equivalente a que para todo $a \in Q(R) \setminus \{0\}$ se tiene que $a \in R$ o $a^{-1} \in R$. En el siguiente resultado se presentan otras equivalencias de este concepto, las cuales serás usadas a lo largo de la presente sección.

Teorema A.2. [11, teorema 16.3, p.175] Sea R un dominio entero con campo de cocientes K. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. Si $a \in K \setminus \{0\}$ entonces $a \in R$ o $a^{-1} \in R$.
2. El conjunto de ideales principales de R está totalmente ordenado por inclusión.
3. El conjuto de ideales está totalmente ordenado por inclusión.

De esta manera, si R es un anillo de valuación e I es un ideal propio de R en particular se tiene que $\mathrm{Spec}(R)$ y $\mathbf{V}(I)$ son conjuntos de ideales primos de R totalmente ordenados así que de la demostración del teorema 1.37 se tiene que el siguiente corolario.

Corolario A.3. Si R es un anillo de valuación e I es un ideal propio de R entonces $\mathrm{Nil}(R), \sqrt{I} \in \mathrm{Spec}(R)$.

Otras propiedades sencillas pero importantes que poseen los anillos de valuación se mencionan en la siguiente proposición.

Proposición A.4. Sea R un anillo de valuación.

1. Si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ son tales que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ entonces $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.
2. Si I, J, K son ideales no nulos de R entonces $I(J \cap K) = IJ \cap IK$.
3. Para un ideal propio J de R se valen las siguientes afirmaciones:
   a) Si J es finitamente generado entonces J es principal.

b) Si $\mathfrak{P} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J^n$ entonces $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(R)$. Si para algún $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $J^k = J^{k+1}$ entonces J es idempotente.

c) Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ es tal que $\mathfrak{p} \subsetneq J$ entonces $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{P}$.

d) Si I es un ideal de R tal que $J \subsetneq \sqrt{I}$ entonces $J^m \subset I$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

Demostración.

1. La contención $\mathfrak{pq} \subset \mathfrak{p}$ es clara. Para ver la otra contención sea $a \in \mathfrak{p}$. Si $a = 0$ entonces $a = 0 \cdot 0 \in \mathfrak{pq}$ y terminamos. supongamos entonces que $a \neq 0$. Dado que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ existe $x \in \mathfrak{q}$ tal que $x \notin \mathfrak{p}$. Como R es anillo de valuación se tiene que $(a) \subset (x)$ o bien $(x) \subset (a)$. Observe que no puede darse $(x) \subset (a)$ pues en caso contrario y dado que $(a) \subset \mathfrak{p}$, se tendría que $x \in \mathfrak{p}$, lo cual no puede ocurrir. Se sigue que $(a) \subset (x)$ y entonces $a = rx$ para algún $r \in R$. Nuevamente tenemos que $(r) \subset (a)$ o $(a) \subset (r)$.

   - Caso 1. Si $(r) \subset (a)$ entonces $r \in (a) \subset \mathfrak{p}$ y así $a = rx \in \mathfrak{pq}$.
   - Caso 2. Si $(a) \subset (r)$ entonces $a = rt$ para algún $t \in R$. Dado que $a \in \mathfrak{p}$ la relación $rt = a$ implica que $r \in \mathfrak{p}$ o $t \in \mathfrak{p}$. Si pasara que $t \in \mathfrak{p}$ entonces tendríamos $rt = a = rx$. Note que $t \neq x$ pues $t \in \mathfrak{p}$ y $x \notin \mathfrak{p}$. Como R es dominio entero la igualdad $rt = rx$ implica que $r = 0$ y entonces $a = rx = 0$ lo cual es una contradicción. Se tiene entonces que $r \in \mathfrak{p}$ y así $a = rx \in \mathfrak{pq}$.

   En cualquier caso se tiene que $a \in \mathfrak{pq}$, lo que muestra que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{pq}$.

2. Como R es anillo de valuación podemos suponer que $J \subset K$, de donde $J \cap K = J$ y además $IJ \subset IK$ luego $I(J \cap K) = IJ = IJ \cap IK$.

3.

   a) Sea $J = (a_1, \ldots, a_r)$ un ideal finitamente generado de R. Como R es anillo de valuación el conjunto $\{(a_i) : i = 1, \ldots, r\}$ de ideales principales de R está totalmente ordenado, por lo que existe $l \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $(a_i) \subset (a_l)$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$ y así $(a_l) \subset J = (a_1, \ldots, a_r) \subset (a_l)$, de donde $J = (a_l)$; es decir, J es principal.

   b) Sean $x, y \in R \setminus \mathfrak{P}$. Existen entonces $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x \notin J^n$ e $y \notin J^m$, y dado que R es anillo de valuación esto implica que $J^n \subsetneq (x)$ y $J^m \subsetneq (y)$. Multiplicando la primer relación por el

ideal principal (y) y la segunda por J^n obtenemos $J^n\,(y) \subsetneq (xy)$ y $J^{m+n} \subset J^n\,(y)$. Con esto $J^{m+n} \subsetneq (xy)$ y así $xy \notin \mathfrak{P}$.
Si para algún $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $J^k = J^{k+1}$ entonces $\mathfrak{P} = J^k$ y dado que $\mathfrak{P}$ es ideal primo también se tiene que $\mathfrak{P} = J$, de donde $J \subset J^k$, por tanto $J = J^k = J^{k+1}$. Para terminar observe que $J = J^{k+1} \subset J^2 \subset J$; es decir, $J^2 = J$.

c) Note primero que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $J^n \not\subseteq \mathfrak{p}$ pues de lo contrario, por el teorema 1.11, se tendría que $J \subset \mathfrak{p} \subsetneq J$. Lo anterior implica que $\mathfrak{p} \subset J^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así $\mathfrak{p} \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} J^n = \mathfrak{P}$.

d) Probaremos la afirmación contrapositiva. Supongamos que $J^n \not\subseteq I$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces que $I \subset J^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; de esta manera $I \subset \mathfrak{P}$ y entonces $\sqrt{I} \subset \mathfrak{P} \subset J$, por lo que no ocurre que $J \subsetneq \sqrt{I}$.

$\square$

No podemos dejar de mencionar ahora que los dominios de valuación proporcionan ejemplos menos triviales en los cuales $\omega(IJ) < \omega(I) + \omega(J)$, además de los mencionados en los comentarios posteriores al ejemplo 6: Si R es un anillo de valuación y $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(R)$ son tales que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$, por el inciso 1 de la proposición anterior se tiene que $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, de donde $\omega\,(\mathfrak{p}\mathfrak{q}) = \omega(\mathfrak{p}) = 1 < 2 = \omega(\mathfrak{p}) + \omega(\mathfrak{q})$.

Mostraremos un resultado que habla acerca de los ideales primarios de un anillo de valuación. Tenemos el siguiente lema previo.

Lema A.5. Si I es un ideal de un anillo R e $y \in R$ es tal que $I \subset (y)$ entonces $(I : y) \cdot (y) = I$.

Demostración. La contención $(I : y) \cdot (y) \subset I$ es clara. Sea $a \in I$. Por hipótesis se tiene que $a = ry$ para algún $r \in R$ y como $ry = a \in I$ entonces $r \in (I : y)$ y por tanto $a = ry \in (I : y) \cdot (y)$. $\square$

Teorema A.6. Sea R un anillo de valuación y sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $\mathfrak{p} \neq 0$.

1. Si $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario y si $x \in R \setminus \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{q} = (x)\mathfrak{q}$.

2. Si $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ son dos ideales $\mathfrak{p}$-primarios de R entonces $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario de R. En particular $\mathfrak{p}^n$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario de R para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $\mathfrak{p}$ no es idempotente entonces todo ideal $\mathfrak{p}$-primario es una potencia de $\mathfrak{p}$.

Demostración.

1. Dado que $x \notin \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ entonces $x \notin \mathfrak{q}$ y como R es anillo de valuación se tiene que $\mathfrak{q} \subset (x)$. Si $J = (\mathfrak{q} : x)$ es claro que $\mathfrak{q} = J$ y por el lema anterior tenemos que $\mathfrak{q} \cdot (x) = \mathfrak{q}$.

2. Es claro que $\sqrt{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2} = \mathfrak{p}$. Sean $x, y \in R$ tales que $xy \in \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ y $x \notin \mathfrak{p}$, observe que, como $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{p}$, esta última relación implica que $x \notin \mathfrak{q}_1$, y dado que R es anillo de valuación se sigue que $\mathfrak{q}_1 \subset (x)$. Como en el inciso anteior $\mathfrak{q}_1 = (\mathfrak{q}_1 : x)$ es tal que $\mathfrak{q}_1 \cdot (xR) = \mathfrak{q}_1$. Con esto $(xy) \subset \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 = (x)\,\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ y así $xy = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x r_i b_i = x\left(\sum_{i=1}^{n} r_i b_i\right)$, donde $r_i \in R$ y $b_i \in \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$. Dado que $x \neq 0$ (pues $x \notin \mathfrak{p}$) se sigue que $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_i b_i \in \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$, lo que termina la prueba de que $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario.

   Si $\mathfrak{p}$ no es idempotente entonces $\mathfrak{p}^2 \subsetneq \mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R entonces $\mathfrak{p}^2 \subsetneq \sqrt{\mathfrak{q}}$ y por el inciso 3 d) de la proposición A.4 se tiene que $\left(\mathfrak{p}^2\right)^m \subset \mathfrak{q}$. Sea k el mínimo natural tal que $\mathfrak{p}^k \subset \mathfrak{q}$; es decir, $\mathfrak{p}^k \subset \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{p}^{k-1} \nsubseteq \mathfrak{q}$. Existe entonces $y \in \mathfrak{p}^{k-1}$ tal que $y \notin \mathfrak{q}$, de donde $\mathfrak{q} \subset (y)$. Se tiene entonces que $\mathfrak{q} = (qr : y)$ es tal que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(y)$ y como $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(y) \subset \mathfrak{p}(y) \subset \mathfrak{p}\mathfrak{p}^{k-1} = \mathfrak{p}^k$, lo que muestra que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^k$.

$\square$

Dado un campo K y un grupo totalmente ordenado H, con la operación compatible con el orden, una *valuación de K con valores en H* es una función suprayectiva $\nu : K \setminus \{0\} \longrightarrow H$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$, es decir, ν es morfismo de grupos.

2. $\nu(x + y) \geq \text{mín}\,\{\nu(x), \nu(y)\}$.

El morfismo ν se puede extender a todo K adjuntando un elemento a H, denotado por ∞, tal que $\infty + \infty = \infty$ y además $h < \infty$, $h + \infty = \infty$ para todo $h \in H$, y definiendo además $\nu(0) = \infty$. En tal caso el conjunto $R_\nu = \{x \in K : \nu(x) \geq 0\}$ es un anillo, llamado *anillo de valuación de ν*; el conjunto $\mathfrak{m}_\nu = \{x \in K : \nu(x) > 0\}$ es el único ideal maximal de R_ν, por lo que R_ν es anillo local. No es difícil verificar además que R_ν es un dominio entero noetheriano y que todo ideal propio no nulo de R_ν es de la forma $\mathfrak{m}_\nu^k$ donde $k \in \mathbb{N}$ y, como consecuencia, $\dim(R_\nu) = 1$.

Una *valuación discreta* de un campo K es una valuación suprayectiva $\nu : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$, donde G es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}$. Un dominio entero R es un *dominio de valuación discreta* si existe una valuación discreta de

$Q(R)$, el campo de cocientes de R, de tal manera que R es el anillo de valuación de la valuación discreta. De esta manera, un dominio de valuación discreta es un anillo local noetheriano de dimensión uno. Algunas de las caracterizaciones más conocidas de los dominios de valuación discreta son las siguientes.

Proposición A.7. [3, proposición 9.2, p.105] Sea R un dominio entero local noetheriano de dimensión uno y $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ su único ideal maximal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. R es un anillo de valuación discreta.
2. $\mathfrak{m}$ es un ideal principal.
3. Todo ideal propio no nulo de R es una potencia de $\mathfrak{m}$.

En el siguiente resultado se caracterizarán a los dominios de valuación discreta de entre todos los anillos de valuación.

Teorema A.8. Sea R un anillo de valuación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. R es un dominio de valuación discreta.
2. R es un dominio de ideales principales.
3. R es noetheriano.

Demostración. Dado que R es anillo de valuación es local. Sea $\mathfrak{m}$ el único ideal maximal de R.

1.⇒2. Supongamos que R es un dominio de valuación discreta y observe que, por la proposición anterior $\mathfrak{m} = (a)$ para algún $a \in R$, $a \neq 0$. Si J es un ideal propio no nulo de R, por la proposición anterior se tiene que, para algún $k \in \mathbb{N}$, $J = \mathfrak{m}^k = (a)^k = \left(a^k\right)$; es decir, J es principal.

2.⇒3. Esta afirmación es clara.

3.⇒1. Dado que R es noetheriano se tiene que todo ideal de R es finitamente generado y por el inciso 2 de la proposición A.4 se sigue que R es un dominio de ideales principales, por lo que todo ideal primo no nulo de R es maximal; es decir, $\dim(R) = 1$. De la proposición anterior se sigue que R es dominio de valuación discreta.

□

Los resultados anteriores serán de gran ayuda para mostrar algunas propiedades que satisfacen aquellos anillos que localmente sean anillos de valuación tales como los dominios de Prüfer y los casi dominios de Dedekind. Dichas propiedades son de suma importancia durante el desarrollo de algunos resultados de la sección 3.3.

Recordemos la correspondecia biyectiva que existe entre $\operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right)$ y $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$, donde R es un anillo y $S \subset R$ es un sistema multiplicativo, así como la correspondencia biyectiva que existe entre los ideales primarios de $S^{-1}R$ y los ideales primarios de R que no intersectan a S, específicamente el siguiente teorema.

Teorema A.9. Sean R un anillo y sea $S \subset R$ un sistema multiplicativo.

1. [17, teorema 5.32, p.94]
   a) Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ es tal que $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$ entonces $\mathfrak{p}^e = S^{-1}R$.
   b) Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ y $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ entonces $\mathfrak{p}^e \in \operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right)$.
   c) Si $P \in \operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right)$ entonces $P^c \in \operatorname{Spec}(R)$ y $P^{ce} = P$.
2. [17, teorema 5.37, p.95]
   a) Si $\mathfrak{q}$ es un ideal primario de R tal que $\mathfrak{q} \cap S \neq \emptyset$ entonces $\mathfrak{q}^e = S^{-1}R$
   b) Si $\mathfrak{q}$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R y $\mathfrak{q} \cap S$ entonces $\mathfrak{q}^e$ es un ideal $\mathfrak{p}^e$-primario de $S^{-1}R$.
   c) Si Q es un ideal P-primario de $S^{-1}R$ entonces Q^c es un ideal P^c-primario de R y $Q^{ce} = Q$.

En algunos resultados posteriores usaremos la siguiente notación: Sea R un anillo, $S \subset R$ un sistema multiplicativo y considérese el morfismo natural $R \longrightarrow S^{-1}R$.

a) Si I es un ideal de R, I^e denotará la extensión de I en $S^{-1}R$.

b) Si J es un ideal de $S^{-1}R$, J^c denotará la contracción de J en R.

Recuerde que en general el morfismo $f : R \longrightarrow S^{-1}R$ no es inyectivo, sin embargo la inyectividad se garantiza cuando R es un dominio entero. Algunos hechos importantes que usaremos frecuentemente son los siguientes:

i) $(I \cap J)^e = I^e \cap J^e$.

ii) $(IJ)^e = I^e J^e$.

iii) $\left(\sqrt{I}\right)^e = \sqrt{I^e}$.

iv) $I^e = S^{-1}R$ si y solo si $I \cap S \neq \emptyset$

Estas propiedades son bien conocidas y pueden encontrarse, por ejemplo, en [17, lema 5.31, p.92].
Por otro lado, si $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de sistemas multiplicativos de R e I, J son ideales de R y $S_\lambda^{-1}R$ respectivamente, entonces

a) I^{e_λ} denotará la extensión de I en $S_\lambda^{-1}R$.

b) J^{c_λ} denotará la contracción de J en R.

En muchos de los resultados de este apéndice consideraremos el caso especial en el que los sistemas multiplicativos sean los complementos de ideales primos.

La teoría anteriormente desarrollada nos permite regresar brevemente a los anillos de valuación. Si R es un anillo de valuación con único ideal maximal $\mathfrak{m}$ que además es dominio de valuación discreta en particular se tiene que $\dim(R) = 1$ y por tanto todo ideal propio no nulo de R es $\mathfrak{m}$-primario. De la proposición A.7 se tiene que si I es un ideal propio no nulo de R entonces $I = \mathfrak{m}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y por tanto todo ideal propio de R es una potencia de su radical. Más adelante mostraremos que de hecho esta es una condición suficiente para que un anillo de valuación sea dominio de valuación discreta. El siguiente lema será de utilidad.

Lema A.10. Sea R un anillo de valuación tal que cada ideal propio de R es una potencia de su radical. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $\mathfrak{p} \neq 0$, es minimal sobre algún ideal principal no nulo (x) entonces $\mathfrak{p}$ es ideal maximal de R.

Demostración. Como $\mathfrak{p}$ es minimal sobre (x) entonces, en el anillo de fracciones $R_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ es el único primo minimal sobre $(x)R_\mathfrak{p}$ así que $\sqrt{(x)R_\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ y dado que $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ es ideal maximal de $R_\mathfrak{p}$ se sigue que $(x)R_\mathfrak{p}$ es ideal $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$-primario de $R_\mathfrak{p}$, por lo que, bajo el morfismo natural $R \longrightarrow R_\mathfrak{p}$, $((x)R_\mathfrak{p})^c$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario de R y por hipótesis se tiene que $((x)R_\mathfrak{p})^c = \mathfrak{p}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Con esto $(x)R_\mathfrak{p} = ((x)R_\mathfrak{p})^{ce} = (\mathfrak{p}^n)^e = (\mathfrak{p}_\mathfrak{p})^n$. Afirmamos que $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ es invertible. Si $n = 1$ es claro y si $n > 1$, como x es unidad en el campo de cocientes de R pues $x \neq 0$, del último inciso de la proposición A.1 se sigue que $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ es invertible, esto implica que $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ pues de lo contrario se tendría que $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}$ lo cual no puede ocurrir. Tenemos así $\left(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}^2\right)^c \subsetneq (\mathfrak{p}_\mathfrak{p})^c = \mathfrak{p}$ y dado que R es anillo de valuación, $\mathfrak{p}^2$ es $\mathfrak{p}$-primario (teorema A.6 inciso 2) así que

$\mathfrak{p}^2 = \left(\mathfrak{p}^2_{\mathfrak{p}}\right)^c \subsetneq \mathfrak{p}$. Sean $a \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ y $b \in R \setminus \mathfrak{p}$. Note que $(ab) \subset \mathfrak{p}$ pues $a \in \mathfrak{p}$ y como además $\mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{p}^2 + (ab) \subset \mathfrak{p}$ y por tanto $\sqrt{\mathfrak{p}^2 + (ab)} \subset \mathfrak{p}$. Por otro lado $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}^2} \subset \sqrt{\mathfrak{p}^2 + (ab)}$, con lo cual $\sqrt{\mathfrak{p}^2 + (ab)} = \mathfrak{p}$. Por hipótesis tenemos que $\mathfrak{p}^2 + (ab) = \mathfrak{p}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Si $m \geq 3$ entonces $\mathfrak{p}^m \subset \mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{p}^2 + (ab) = \mathfrak{p}^m$; es decir, $\mathfrak{p}^m = \mathfrak{p}^2$ para todo $m \geq 2$, de donde se sigue que $\mathfrak{p}^2 + (ab) = \mathfrak{p}$ o bien $\mathfrak{p}^2 + (ab) = \mathfrak{p}^2$. Si $\mathfrak{p}^2 + (ab) = \mathfrak{p}^2$ entonces $(ab) \subset \mathfrak{p}^2$ lo cual no puede ocurrir pues $\mathfrak{p}^2$ es $\mathfrak{p}$-primario, $a \notin \mathfrak{p}^2$ y $b \notin \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}^2}$. Se tiene entonces que $\mathfrak{p}^2 + (ab) = \mathfrak{p}$. Como $a \in \mathfrak{p}$ entonces $a = c + rab$, para algunos $c \in \mathfrak{p}^2$, $r \in R$, y entonces $a(1 - rb) = c$, de donde $a(1 - rb) \in \mathfrak{p}^2$. Por ser $\mathfrak{p}^2$ ideal $\mathfrak{p}$-primario y $a \notin \mathfrak{p}^2$ se concluye que $1 - rb = d$ para algún $d \in \mathfrak{p}$. Con esto $1 \in \mathfrak{p} + (b)$ y por tanto $\mathfrak{p} + (b) = R$, esto para todo $b \in R \setminus \mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}$ no fuera ideal maximal existiría un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R tal que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$, por lo que existiría $z \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$. Por lo demostrado anteriormente, $R = \mathfrak{p} + (z) \subset \mathfrak{m}$, lo cual no es posible. Se sigue que $\mathfrak{p}$ es ideal maximal. □

Proposición A.11. Si R es un anillo de valuación tal que todo ideal propio de R es una potencia de su radical entonces $\dim(R) = 1$.

Demostración. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ no nulo. Existe entonces $a \in \mathfrak{p}$ con $a \neq 0$. Como $(a) \subset \mathfrak{p}$ existe $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R)$ minimal sobre (a) tal que $(a) \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$. Por el lema anterior se tiene que $\mathfrak{p}'$ es maximal, luego $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ y $\mathfrak{p}$ es maximal. □

Estamos en condiciones de dar una nueva caracterización de los dominios de valuación discreta que ya eran anillos de valuación.

Corolario A.12. Sea R un anillo de valuación. R es anillo de valuación discreta si y solo si todo ideal propio de R es una potencia de su radical.

Demostración. Una implicación ya ha sido discutida previamente. Por otro lado, si R es un anillo de valuación en el que todo ideal propio es una potencia de su radical, por la proposición anterior se tiene que $\dim(R) = 1$. Si $\mathfrak{m}$ es en único ideal maximal de R, de lo anterior se sigue que todo ideal propio no nulo de R es $\mathfrak{m}$-primario y por tanto, el conjunto de todos los ideales propios de R es $\{0\} \cup \{\mathfrak{m}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. De esta manera toda cadena ascendente de ideales de R debe ser finita y entonces estacionaria, por lo que R es noetheriano. Del teorema A.8 se tiene el resultado. □

A.3. Dominios de Prüfer

En la sección A.1 se demostró que si un ideal es invertible entonces es finitamente generado. Esta sección está dedicada al repaso de los dominios enteros para los cuales se dá la afirmación recíproca.

Definición A.13. Un dominio entero R se dice *dominio de Prüfer* si cada ideal finitamente generado no nulo de R es invertible.

En el siguiente teorema se enlistan una serie de caracterizaciones de los dominios de Prüfer.

Teorema A.14. Sea R un dominio entero. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. R es un dominio de Prüfer.

2. Cada ideal no nulo de R generado por dos elementos es invertible.

3. Si I, J, K son ideales de R tales que $I \neq 0$ es finitamente generado e $IJ = IK$ entonces $J = K$.

4. $R_{\mathfrak{p}}$ es un anillo de valuación para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

5. Si I, J, K son ideales de R entonces $I(J \cap K) = IJ \cap IK$.

6. Si I, J son ideales de R entonces $(I + J)(I \cap J) = IJ$.

Demostración. Mostraremos primero que 1. y 2. son equivalentes. La afirmación 1.⇒2. es clara.

2.⇒1. Para ver que R es dominio de Prüfer sea $I = (a_1, \ldots, a_n)$ un ideal finitamente generado no nulo de R y supongamos que $a_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Mostraremos por inducción sobre n que I es invertible. Si $n = 1$, como $I \neq 0$, es claro que I es invertible con inverso $I^{-1} = \left(\frac{1}{a_1}\right)$. Si $n = 2$ por hipótesis se tiene que I es invertible. Supongamos que $n > 2$ y que todo ideal no nulo generado por $n - 1$ elementos es invertible. Sean $A = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, $B = (a_2, \ldots, a_n)$, $D = (a_1, a_n)$ y además $E = a_1 A^{-1} D^{-1} + a_n B^{-1} D^{-1}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} IE &= (I + (a_n))\, a_1 A^{-1} D^{-1} + (a_1 + B)\, a_n B^{-1} D^{-1} \\ &= a_1 D^{-1} + a_n a_1 A^{-1} D^{-1} + a_1 a_n B^{-1} D^{-1} + a_n D^{-1} \\ &= a_1 D^{-1} \left(R + a_n B^{-1}\right) + c_n D^{-1} \left(R + c_1 A^{-1}\right). \end{aligned}$$

Dado que $a_n B^{-1} \subset R$ y $a_1 A^{-1} \subset R$ de la igualdad anterior se sigue que $IE = c_1 D^{-1} + c_n D^{-1} = (a_1, a_n)\, D^{-1} = R$, de donde I es invertible.

1.⇒3. Supongamos que I, J, K son ideales de R tales que $I \neq 0$ es finitamente generado e $IJ = IK$. Como R es dominio de Prüfer se tiene que I es invertible y entonces $J = I^{-1}IJ = I^{-1}IK = K$.

3.⇒4. Notemos primero que si I, J, K son ideales de R tales que $I \neq 0$ es finitamente generado e $IJ \subset IK$ entonces $IJ + IK = IK$, de donde $IK = I(J + K)$ y como I es finitamente generado de la afirmación 3 se sigue que $K = J + K$, por lo que $J \subset K$. Hemos motrado que si I, J, K son ideales de R tales que $I \neq 0$ es finitamente generado e $IJ \subset IK$ entonces $J \subset K$.

Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Mostraremos que si $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in R_{\mathfrak{p}}$ entonces $\left(\frac{a}{s}\right) R_{\mathfrak{p}} \subset \left(\frac{b}{t}\right) R_{\mathfrak{p}}$ o bien $\left(\frac{b}{t}\right) R_{\mathfrak{p}} \subset \left(\frac{a}{s}\right) R_{\mathfrak{p}}$. Dado que $s, t \notin \mathfrak{p}$ entonces $\frac{1}{s}, \frac{1}{t}$ son unidades de $R_{\mathfrak{p}}$, por lo que basta mostrar que $\left(\frac{a}{1}\right) R_{\mathfrak{p}} \subset \left(\frac{b}{1}\right) R_{\mathfrak{p}}$ o $\left(\frac{b}{1}\right) R_{\mathfrak{p}} \subset \left(\frac{a}{1}\right) R_{\mathfrak{p}}$. Si $a = 0$ o $b = 0$ esto es claro, supongamos entonces que $a, b \neq 0$. Observe que $\left(a^2b + ab^2\right) \subset \left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right)$, de donde $(ab)(a, b) \subset \left(a^2, b^2\right)(a, b)$ y como $a, b \neq 0$ del comentario previo se sigue que $(ab) \subset \left(a^2, b^2\right)$ y entonces $ab = xa^2 + yb^2$ para algunos $x, y \in R$. Nótese ahora que

$$
\begin{aligned}
(by)(a, b) &= (aby) + \left(b^2y\right) \\
&= (aby) + \left(ab - xa^2\right) \\
&\subset (ab) + \left(a^2\right) \\
&= (a)(a, b),
\end{aligned}
$$

de donde $(by) \subset (a)$. De esta manera $by = au$ para algún $u \in R$ y $ab = xa^2 + uab$ o equivalentemente $xa = b(1 - u)$ pues $a \neq 0$. Si $u \notin \mathfrak{p}$ entonces $\frac{a}{1} = \frac{by}{u} = \frac{b}{1}\frac{y}{u} \in \left(\frac{b}{1}\right) R_{\mathfrak{p}}$ y si $u \in \mathfrak{p}$ entonces $1 - u \notin \mathfrak{p}$, de donde $\frac{b}{1} = \frac{xa}{1-u} = \frac{a}{1}\frac{x}{1-u} \in \left(\frac{a}{1}\right) R_{\mathfrak{p}}$.

4.⇒5. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Por hipótesis $R_{\mathfrak{p}}$ es anillo de valuación así que, usando el inciso 3 de la proposición A.4 y las propiedades del morfismo natural $R \longrightarrow R_{\mathfrak{p}}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
(I(J \cap K))_{\mathfrak{p}} &= I_{\mathfrak{p}}\left(J_{\mathfrak{p}} \cap K_{\mathfrak{p}}\right) \\
&= I_{\mathfrak{p}}J_{\mathfrak{p}} \cap I_{\mathfrak{p}}K_{\mathfrak{p}} \\
&= (IJ)_{\mathfrak{p}} \cap (IK)_{\mathfrak{p}} \\
&= (IJ \cap IK)_{\mathfrak{p}}.
\end{aligned}
$$

La conclusión es clara ahora.

5.⇒6. Si la afirmación 5 se cumple entonces

$$(I+J)(I\cap J) = (I+J)I \cap (I+J)J \supset IJ.$$

La otra contención siempre se cumple.

6.⇒2. Sea $I = (a_1, a_2)$ un ideal no nulo de R. Si $a_1 = 0$ o $a_2 = 0$ es claro que I es invertible. Supongamos entonces que $a_1, a_2 \neq 0$, de donde $A = (a_1)$ y $B = (a_2)$ son ideales invertibles de R y además

$$R = ABB^{-1}A^{-1} = (A+B)(A\cap B)B^{-1}A^{-1} = I(A\cap B)B^{-1}A^{-1}$$

de donde I es invertible.

$\square$

Se tiene el siguiente corolario.

Corolario A.15. Un dominio entero R es un dominio de Prüfer si y solo si $R_{\mathfrak{m}}$ es un anillo de valuación para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.

El siguiente lema será de utilidad en el siguiente par de resultados.

Teorema A.16. Sea I un ideal del anillo R y supongamos que $\mathrm{Max}(R) = \{\mathfrak{m}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Se tiene que $I = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I^{e_\lambda c_\lambda}$.

Demostración. Una contención es clara, por otro lado si $x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I^{e_\lambda c_\lambda}$ entonces, para todo $\lambda\in\Lambda$, existe $y_\lambda \in R\setminus \mathfrak{m}_\lambda$ tal que $xy_\lambda \in I$ y así $(I:x)$ es un ideal de R con $y_\lambda \in (I:x)$ y entonces $(I:x) \nsubseteq \mathfrak{m}_\lambda$ para todo $\lambda\in\Lambda$, de donde se sigue que $(I:x) = R$, de donde $x \in I$. $\square$

La siguiente es una propiedad de los anillos de valuación que sigue siendo válida para los dominios de Prüfer.

Proposición A.17. Sea R un dominio de Prüfer. Si I es un ideal propio de R tal que $I^k = I^{k+1}$ para algún $k\in\mathbb{N}$ entonces I es idempotente.

Demostración. Si $k=1$ la afirmación es clara. Supongamos entonces que $k\geq 2$. Observe que $\left(I^k\right)_{\mathfrak{m}} = \left(I^{k+1}\right)_{\mathfrak{m}}$ para todo $\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)$ por lo que $I_{\mathfrak{m}}$ es ideal idempotente de $R_{\mathfrak{m}}$ (segunda parte del inciso 3 b), proposición A.4). Se sigue que $I \subset \left(\left(I^k\right)_{\mathfrak{m}}\right)^c$ para todo $\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)$ y así $I \subset \bigcap_{\mathfrak{m}} \left(\left(I^k\right)_{\mathfrak{m}}\right)^c = I^k$, la última igualdad por el teorema A.16. Tenemos así que $I = I^k \subset I^2 \subset I$; es decir $I^2 = I$ de donde I es idempotente. $\square$

Los siguientes dos resultados ayudan en la caracterización de los ideales n-absorbentes de los dominios de Prüfer (teorema 3.66).

Lema A.18. Sea R un anillo y sea $\mathrm{Max}(R) = \{\mathfrak{m}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Si I es un ideal de R con radical primo $\mathfrak{p}$ y si $I_{\mathfrak{m}_\lambda}$ es un ideal $\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}_\lambda}$-primario de $R_{\mathfrak{m}_\lambda}$ para cada $\lambda \in \Lambda$ tal que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_\lambda$ entonces I es ideal $\mathfrak{p}$-primario de R.

Demostración. Sea $\mathfrak{q}$ la componente $\mathfrak{p}$-primaria aislada de I, es decir $\mathfrak{q} = I^{ec}$ es el ideal $\mathfrak{p}$-primario más pequeño de R que contiene a I. Dado $\lambda \in \Lambda$ se tienen dos casos:

- Caso 1. $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_\lambda$. En este caso se tiene por hipótesis que $I^{e_\lambda c_\lambda}$ es un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R y además contiene a I, por tanto $\mathfrak{q} \subset I^{e_\lambda c_\lambda}$.

- Caso 2. $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{m}_\lambda$. Aquí $I^{e_\lambda c_\lambda} = R$ y entonces también se tiene que $\mathfrak{q} \subset I^{e_\lambda c_\lambda}$.

De los casos anteriores se sigue que $\mathfrak{q} \subset \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I^{e_\lambda c_\lambda}$ la cual coincide, según el teorema A.16, con I. $\square$

El siguiente resultado dice, entre otras cosas, que el conjunto de todos los ideales primarios de un dominio de Prüfer con mismo radical es cerrado bajo multiplicación.

Proposición A.19. Sea R un dominio de Prüfer.

1. Sean $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $\mathfrak{p} \neq 0$, y $\mathfrak{q}$ un ideal $\mathfrak{p}$-primario de R. Si $x \in R \setminus \mathfrak{p}$ entonces $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\,(\mathfrak{q} + (x))$.

2. Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $\mathfrak{p} \neq 0$, y $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ son dos ideales $\mathfrak{p}$-primarios de R entonces $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario. En particular se tiene que $\mathfrak{p}^n$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathfrak{p}$ no es idempotente entonces todo ideal $\mathfrak{p}$-primario de R es una potencia de $\mathfrak{p}$.

3. Sean $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$.

   a) Si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ son incomparables entonces $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = R$.

   b) Si $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ entonces $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

Demostración.

1. Para mostrar que $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^2 + (x)\mathfrak{q}$ es suficiente mostrar que $\mathfrak{q}_\mathfrak{m} = \left(\mathfrak{q}^2 + (x)\mathfrak{q}\right)_\mathfrak{m}$ para cada $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. Si $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{m}$ entonces $\mathfrak{q}_\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_\mathfrak{m}^2 = R_\mathfrak{m}$ y trivialmente se cumple la igualdad deseada. Por otro lado, si $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ entonces $\mathfrak{q}_\mathfrak{m}$ es ideal $\mathfrak{p}_m$-primario del anillo de valuación $R_\mathfrak{m}$. Afirmamos ahora que $\frac{x}{1} \in R_\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}_m$. Si $\frac{x}{1} \in \mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ existiría $u \in R \setminus \mathfrak{m}$ tal que $ux \in \mathfrak{p}$ y, como $x \notin \mathfrak{p}$, $u \in \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Se tiene entonces que $u^n \in \mathfrak{q}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y así $u^n \notin \mathfrak{m}$, de donde $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{m}$ lo cual no puede ocurrir. Por el inciso 1 del teorema A.6 se tiene que $\mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_\mathfrak{m}\left(\frac{x}{1}\right)$ y como $\mathfrak{q}^2 \subset \mathfrak{q}$ se sigue que $\mathfrak{q}_\mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{q}_\mathfrak{m} = \left(\frac{x}{1}\right)\mathfrak{q}$, de donde
$$\left(\mathfrak{q}^2 + (x)\mathfrak{q}\right)_\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_\mathfrak{m}^2 + \left(\frac{x}{1}\right)\mathfrak{q}_\mathfrak{m} = \left(\frac{x}{1}\right)\mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}_\mathfrak{m}.$$

2. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de R tal que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$. Se tiene entonces que $(\mathfrak{q}_1)_\mathfrak{m}$ y $(\mathfrak{q}_2)_\mathfrak{m}$ son ideales $\mathfrak{p}_\mathfrak{m}$-primarios del anillo de valuación $R_\mathfrak{m}$, así que por el teorema A.6 $(\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)_\mathfrak{m} = (\mathfrak{q}_1)_\mathfrak{m}(\mathfrak{q}_2)_\mathfrak{m}$ es ideal $\mathfrak{p}_\mathfrak{m}$-primario de $R_\mathfrak{m}$. Como además $\sqrt{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2} = \mathfrak{p}$ del lema A.18 se sigue que $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ es ideal $\mathfrak{p}$-primario de R.
Si $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}$ entonces $(\mathfrak{p}_\mathfrak{p})^2 \neq \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$, por lo que en el anillo de valuación $R_\mathfrak{p}$ se tiene, por el inciso 2 del teorema A.6, que el conjunto de todos los ideales $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$-primarios de $R_\mathfrak{p}$ es $\{(\mathfrak{p}_\mathfrak{p})^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ así que el conjunto de todos los ideales $\mathfrak{p}$-primarios de R es $\{\mathfrak{p}^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(\mathfrak{p}_\mathfrak{m}^n)^c\}_{n\in\mathbb{N}}$.

3. a) Supongamos que $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} \subsetneq R$. Existe entonces $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ tal que $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ y así $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$. Como R es dominio de Prüfer, $R_\mathfrak{m}$ es anillo de valuación, así que podemos suponer que $\mathfrak{p}_\mathfrak{m} \subset \mathfrak{q}_\mathfrak{m}$. Dado que $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ son ideales primos de R tales que $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ la relación $\mathfrak{p}_\mathfrak{m} \subset \mathfrak{q}_\mathfrak{m}$ implica que $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}_\mathfrak{m})^c \subset (\mathfrak{q}_\mathfrak{m})^c = \mathfrak{q}$ lo cual no puede ocurrir. Esto muestra que $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = R$.

   b) Sea $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ y observe que si $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{m}$ entonces $\mathfrak{q}_\mathfrak{m} = R_\mathfrak{m}$ y así $(\mathfrak{p}\mathfrak{q})_\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_\mathfrak{m}\mathfrak{q}_\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_\mathfrak{m}$. Supongamos ahora que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$. Dado que $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ son tales que $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ entonces $\mathfrak{p}_m, \mathfrak{q}_\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}\,(R_\mathfrak{m})$ y $\mathfrak{p}_\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{q}_\mathfrak{m}$ y como $R_\mathfrak{m}$ es anillo de valuación, del inciso 1 de la proposición A.4 se tiene que $(\mathfrak{p}\mathfrak{q})_\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_\mathfrak{m}\mathfrak{q}_\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_\mathfrak{m}$. El análisis anterior muestra que $(\mathfrak{p}\mathfrak{q})_\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R, de donde se sigue que $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

□

Con la proposición anterior damos por terminadas las propiedades necesarias para el desarrollo de la prueba del teorema 3.66, aclarando que no son todas las propiedades que estos poseen. Un estudio más profundo de estos anillos especiales puede encontrarse, por ejemplo, en [11] y [13].

A.4. Casi dominios de Dedekind

En esta sección se hará un breve repaso de los casi dominios de Dedekind y algunas de sus propiedades. El único resultado aquí presentado es indispensable para el adecuado seguimiento de la demostración del teorema 3.61.

Definición A.20. Un dominio entero R es llamado *casi dominio de Dedekind* si $R_{\mathfrak{m}}$ es un dominio de valuación noetheriano para todo $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$.

El siguiente resultado es una caracterización de los casi dominios de Dedekind.

Teorema A.21. Sea R un dominio entero que no es un campo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. R es un casi dominio de Dedekind.
2. $\dim(R) = 1$ y cada ideal primario de R es una potencia de su radical.
3. Si I, J, K son ideales de R tales que $I \neq 0$ y $JI = KI$ entonces $J = K$.
4. R es un dominio de Prüfer con $\dim(R) = 1$ que no tiene ideales maximales idempotentes.

Demostración.

1.⇒2. Por el teorema A.8 un anillo de valuación noetheriano es un dominio de valuación discreta por lo que, en particular, es local y tiene dimensión de Krull uno. Con esto, si R es un casi dominio de Dedekind entonces $\dim(R_{\mathfrak{m}}) = 1$, donde $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal de R. De acuerdo a la correspondencia biyectiva entre los ideales primos de $R_{\mathfrak{m}}$ y los ideales primos de R contenidos en $\mathfrak{m}$ se sigue que $\dim(R) = 1$. Por otro lado, sea $\mathfrak{q}$ un ideal primario de R. Si $\mathfrak{q} = 0$ entonces $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$ y no hay nada que hacer por lo que podemos suponer que $\mathfrak{q} \neq 0$. Dado que $0 \neq \sqrt{\mathfrak{q}} \in \mathrm{Spec}(R)$ y $\dim(R) = 1$ se sigue que $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$, además $\mathfrak{q}_{\mathfrak{m}}$ es ideal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$-primario del dominio de valuación discreta $R_{\mathfrak{m}}$, por lo que, de acuerdo a la proposición A.7, $\mathfrak{q}_m = (\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}})^n = (\mathfrak{m}^n)_{\mathfrak{m}}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}_{\mathfrak{m}})^c = ((\mathfrak{m}^n)_{\mathfrak{m}})^c = \mathfrak{m}^n$.

2.⇒1. Supongamos que se satisface la afirmación 2. Sea $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ y observe que $\dim(R_{\mathfrak{m}}) = 1$. Si Q es un ideal propio no nulo de $R_{\mathfrak{m}}$ entonces $\sqrt{Q} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$, por lo que Q es ideal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$-primario y entonces Q^c es ideal $\mathfrak{m}$-primario de R así que por hipótesis $Q^c = \mathfrak{m}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, de donde $Q = (\mathfrak{m}^n)_{\mathfrak{m}}$. Esto muestra que los únicos ideales propios no nulos de $R_{\mathfrak{m}}$ son potencias de $\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$ y por tanto el conjunto de ideales de $R_{\mathfrak{m}}$ está totalmente ordenado por inclusión, de donde $R_{\mathfrak{m}}$ es un anillo de valuación. Es claro también que toda cadena ascendente de ideales de $R_{\mathfrak{m}}$ debe ser finita y por tanto estacionaria. Lo anterior muestra que $R_{\mathfrak{m}}$ es un dominio de valuación noetheriano, por lo que R es casi dominio de Dedekind.

1.⇒3. Sea $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ y observe que, como $I \neq 0$, entonces $I_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Como R es un casi dominio de Dedekind $R_{\mathfrak{m}}$ es un anillo de valuación noetheriano por lo que $\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$ es principal generado por, digamos $x \in R_{\mathfrak{m}} \setminus \left\{ \frac{0}{1} \right\}$, y además $I_{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}})^n = (x^n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$; es decir, $I_{\mathfrak{m}}$ es principal, de donde $I_{\mathfrak{m}}$ es invertible. Por otro lado la relación $JI = KI$ implica $J_{\mathfrak{m}} I_{\mathfrak{m}} = (JI)_{\mathfrak{m}} = (KI)_{\mathfrak{m}} = K_{\mathfrak{m}} I_{\mathfrak{m}}$ y como $I_{\mathfrak{m}}$ es invertible se sigue que $J_{\mathfrak{m}} = K_{\mathfrak{m}}$; como esto se cumple para todo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ se concluye que $J = K$.

3.⇒4. Si la afirmación 3 se satisface, en particular, es válida para cuando $I \neq 0$ es finitamente generado. Del teorema A.14 se tiene que R es dominio de Prüfer. Si $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ y $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} = R\mathfrak{m}$ por hipótesis se tendría que $\mathfrak{m} = R$, lo cual no puede ocurrir, así que R no tiene ideales maximales idempotentes. Sólo hace falta ver que $\dim(R) = 1$. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $\mathfrak{p} \neq 0$, y sea $x \in R \backslash \mathfrak{p}$. Por el inciso 1 de la proposición A.19 se tiene que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\mathfrak{p} + (x))$, como $\mathfrak{p} \neq 0$, de la afirmación 3 se sigue que $R = \mathfrak{p} + (x)$. Como esto se cumple para todo $x \in R \setminus \mathfrak{p}$ se sigue que $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(R)$.

4.⇒2. Sea $\mathfrak{q}$ un ideal primario. Si $\mathfrak{q} = 0$ la afirmación es clara, por lo que podemos suponer que $\mathfrak{q} \neq 0$ y así $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}} \neq 0$ y por hipótesis se tiene que $\mathfrak{p}$ es maximal y $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}$, así que por el inciso 2 del teorema A.6 se tiene que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^n = \left(\sqrt{\mathfrak{q}}\right)^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

□

Con este teorema concluimos este primer apéndice. Estudios más extensos y profundos de los casi dominios de Dedekind pueden consultarse en [11] y [13].

Apéndice B

Grupos abelianos ordenados

En esta última parte del trabajo vamos incluimos un pequeño resumen sobre los grupos abelianos ordenados y de sus subgrupos aislados. De manera particular se van a caracterizar los subgrupos aislados de $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$ y como consecuencia se sabrá la dimensión de Krull de un anillo de valuación que tenga como grupo de valores a $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$.

Más resultados relacionados a los temas de este apéndi se pueden encontrar en [10] y [13], que fueron la base principal de esta parte.

Definición B.1. Un *grupo abeliano ordenado* es un grupo abeliano G sobre el cual existe un orden total, denotado por $\leq$, tal que si $a, b, c \in G$ y $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.

Si G es un grupo abeliano ordenado y H es subgrupo de G entonces H es un grupo abeliano ordenado cuyo orden es el inducido por el orden de G.

Sean $G_1, \ldots, G_n$ grupos abelianos ordenados y sea $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$. Dados $a = (a_1, \ldots, a_m), b = (b_1, \ldots, b_n) \in G$ diremos que $a = b$ si y solo si $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Si $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in G$ son distintos escribiremos $a < b$ si $a_1 < b_1$ o bien, si para algún $k > 1$ se tiene que $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \ldots, k-1$ y $a_k < b_k$. No es difícil verificar que la relación sobre G definida mediante $a \leq b$ si y solo si $a = b$ o $a < b$ es un orden total sobre G, el cual es llamado el *orden lexicográfico* y por tanto $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ es un grupo abeliano ordenado.

A continuación presentamos una de las definiciones principales de este apéndice.

Definición B.2. Sean G un grupo abeliano ordenado y H un subgrupo de

G. Se dice que H es un subgrupo *aislado* de G si para todo $\alpha \in H$, con $\alpha \geq 0$, la relación $0 \leq \beta \leq \alpha$, $\beta \in G$, implica que $\beta \in H$.

Note que 0 y G son trivialmente subgrupos aislados de G.

El primer resultado que presentaremos dice que los subgrupos aislados de un grupo abeliano ordenado estan ordenados linealmente.

Lema B.3. Sea G un grupo abeliano ordenado. Si H_1, H_2 son dos subgrupos aislados de G entonces $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

Demostración. Supongamos que $H_1 \not\subseteq H_2$. Mostraremos que $H_2 \subset H_1$. Sea $a \in H_2$. Si $a = 0$ es claro que $a \in H_1$. Supongamos ahora que $a > 0$. Dado que $H_1 \not\subseteq H_2$ existe $x \in H_1$ tal que $x \notin H_2$, en particular se tiene que $x \neq 0$ y así $x > 0$ o bien $x < 0$, en cualquier caso se tiene que $x \leq a$ o $a \leq x$.

- Si $x > 0$ no puede ocurrir que $x \leq a$ pues en caso contrario, como H_2 es aislado, se tendría $x \in H_2$ lo cual no es posible. Tenemos así que $0 < a \leq x$ y como H_1 es aislado se sigue que $a \in H_1$.

- Si $x < 0$ no puede ocurrir que $a \leq x$ pues $0 < a \leq x$ implica $x > 0$. Se sigue que $x < a$ y con esto $-a < 0 < -x$. Veamos que de hecho $a < -x$. Si este no fuera el caso se tendría entonces que $0 < -x \leq a$ de donde $-x \in H_2$ que es una contradicción. Tenemos así que $0 < a < -x$ y por tanto $a \in H_1$.

En cualquier caso se tiene que $a \in H_1$.
El caso $a < 0$ reduce al anterior observando que $a \in H$ si y solo si $-a \in H$, para cualquier subgrupo ordenado. $\square$

Observación 12. Sean G un grupo ordenado, H un subgrupo aislado de G y $x \in H$ no nulo. Al ser H un subgrupo ordenado se tiene que $x > 0$ o $x < 0$. Como en la demostración del lema anterior, para mostrar que una afirmación es verdadera para x basta con suponer que $x > 0$ pues en caso contrario $-x > 0$ y se puede aplicar un procedimiento análogo al aplicado a x para concluir que la afirmación también es verdadera para $-x$, es por ello que de aquí en adelante trataremos siempre sólo el caso en que $x > 0$.

Dado $m \in \mathbb{N}$, sea $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$ y para cada $i = 1, \ldots, m$ sea

$$H_i = \{(0, \ldots, 0, x_i, \ldots, x_m) : x_i, \ldots, x_m \in \mathbb{Q}\}.$$

Es claro que H_i es subgrupo de G y que $H_1 = G$. A continuación mostraremos que H_i es subgrupo aislado de G para todo $i = 1, \ldots, m$.

Lema B.4. Si G y H_i son como en el párrafo anterior entonces H_i es subgrupo aislado de G.

Demostración. Si $i = 1$ la afirmación es clara pues $H_1 = G$. Supongamos entonces que $i > 1$. Sea $a = (0, \dots, 0, a_i, \dots, a_m) \in H_i$ tal que $a \geq 0$ y sea $b = (b_1, \dots, b_m) \in G$ tal que $0 \leq b \leq a$. Si $b = 0$ es claro que $b \in H_i$ por lo que podemos suponer que, de hecho, $b > 0$ y así $b_1 > 0$ o bien, para algún $k > 1$, $b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0$ y $b_k > 0$, sin embargo no puede ocurrir que $0 < b_1$ pues como $b \leq a$ se tendría que $0 < b_1 \leq 0$ lo cual claramente no puede ocurrir. Existe así $k > 1$ tal que $b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0$ y $b_k > 0$. Por un razonamiento análogo al anterior no puede ocurrir que $k < i$ por lo que $k \geq i$ y así $b \in H_i$, lo cual muestra que H_i es subgrupo aislado de G. □

Deseamos mostrar ahora que los únicos subgrupos aislados no nulos de $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$ son precisamente los H_i, donde $i \in \mathbb{N}_m$. Dado un subgrupo aislado H de G, para cada $i = 1, \dots, m$, sea $\rho_i : H \longrightarrow \mathbb{Q}$ dada por $(q_1, \dots, q_m) \mapsto q_i$, la proyección en la i-ésima coordenada.

Lema B.5. Sean $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$, H un subgrupo aislado no nulo de G e $i \in \mathbb{N}_m$. Si $\rho_i(H) \neq 0$ entonces existe $y = (y_1, \dots, y_m) \in H$ tal que si $i = 1$ entonces $y_1 > 0$ y si $i > 1$ entonces $y_1 = \cdots = y_{i-1} = 0$ e $y_i > 0$.

Demostración. Como $\rho_i(H) \neq 0$ existe $x = (x_1, \dots, x_m) \in H$ tal que $x_i = \rho_i(x) \neq 0$. Supongamos que $x > 0$. Sea $a = |x_i| \in \mathbb{Q}$; es decir $a = x_i$ si $x_i > 0$ o $a = -x_i$ si $x_i < 0$, y sea $y = (0, \dots, 0, a, x_{i+1}, \dots, x_m) \in G$. Observe que $y > 0$. Veamos ahora que $y \leq x$. Como $x > 0$ se tienen dos posibles casos, a saber, que $x_1 > 0$ y que, para algún $k > 1$, $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0$ y $x_k > 0$, en tal caso no puede ocurrir que $k > i$ pues de lo contrario se tendría que $x_i = 0$, lo cual no es posible por la elección de x, así que $k \leq i$. Consideraremos dos casos para $i \in \mathbb{N}_m$.

- Caso 1. $i = 1$. Si existiera $k > 1$ tal que $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0$ y $x_k > 0$, como se mencionó antes, deberíamos tener $1 < k \leq i = 1$ lo cual no es posible. Por tanto $x_1 > 0$, $a = x_1$ y además $y = (x_1, x_2, \dots, x_m) = x$.

- Caso 2. $i > 1$. En este caso $y = (0, \dots, 0, a, x_{i+1}, \dots, x_m)$.

  a) Si $x_1 > 0$ entonces $x > y$.

  b) Supongamos que existe $k > 1$ tal que $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0$ y $x_k > 0$. Dado que $k \leq i$ tenemos dos posibles subcasos: $k < i$ y

$k = i$. Si $k < i$ entonces $x_k > 0 = y_k$ y como además $x_j = y_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq k-1$ se sigue que $x > y$. Si $k = i$ entonces $x_i > 0$ y $x = (0, \ldots, 0, x_i, \ldots, x_m) = y$.

En cualquiera de los casos anteriores tenemos $0 < y \leq x$ y como H es subgrupo aislado de G se tiene que $y \in H$. □

Observe que el elemento $y \in H$ del lema anterior es estrictamente positivo, esto es, $y > 0$.

En la siguiente proposición usaremos específicamente la forma que tiene el elemento $y = (y_1, \ldots, y_m) \in G$ que produce el lema anterior.

Proposición B.6. Sean $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$ y H un subgrupo aislado no nulo de G. Dado $i \in \mathbb{N}_m$ se tiene que $\rho_i(H) = 0$ o $\rho_i(H) = \mathbb{Q}$.

Demostración. Vamos a suponer que $\rho_i(H) \neq 0$ y mostraremos que necesariamente $\rho_i(H) = \mathbb{Q}$ para ello, sea $r \in \mathbb{Q}$. Veamos que $r \in \rho_i(H)$. Si $r = 0$, tomando $h = 0 \in H$ tenemos que $r = \rho_i(h)$ y $r \in \rho_i(H)$, por lo que podemos suponer que $r \neq 0$. Como $\rho_i(H) \neq 0$ por el lema anterior existe $y = (y_1, \ldots, y_m) \in H$ tal que $y > 0$ e $y_i > 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $Ny_i > |r|$ y observe que $Ny = (Ny_1, \ldots, Ny_m) \in H$ es tal que $Ny > 0$. Sea $a = (a_1, \ldots, a_m) \in G$ definido mediante

$$a_j = \begin{cases} r & \text{si } j = i, \\ Ny_j & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Vamos a mostrar que $a \in H$, para ello consideremos los siguientes casos para $i \in \mathbb{N}_m$.

- Caso 1. $i = 1$. En este caso $y_1 > 0$ y $a = (r, Ny_2, \ldots, Ny_m)$. Si $r > 0$ entonces claramente $0 < a < Ny$ y al ser H subgrupo aislado de G se tiene que $a \in H$. Por otro lado, si $r < 0$ entonces $0 < -a = (-r, -Ny_2, \ldots, -Ny_m) < (Ny_1, \ldots, Ny_m) = Ny$, de donde $-a \in H$ y así $a \in H$. Note que $\rho_1(a) = r$ por lo que $r \in \rho_1(H)$.

- Caso 2. $i > 1$. En este caso $y = (0, \ldots, 0, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_m)$ con $y_i > 0$ y $a = (0, \ldots, 0, r, Ny_{i+1}, \ldots, Ny_m)$. Si $r > 0$ entonces $0 < a < Ny$, por lo cual $a \in H$. Si $r < 0$ entonces $-r > 0$ y

$$0 < -a = (0, \ldots, 0, -r, -Ny_{i+1}, \ldots, -Ny_m) < Ny$$

  de donde $a \in H$. Observe que $r = \rho_i(a)$ y entonces $r \in \rho_i(H)$.

De los casos anteriores se concluye que $\mathbb{Q} \subset \rho_i(H)$ lo que muestra que $\rho_i(H) = \mathbb{Q}$. $\square$

En los siguientes resultados vamos a suponer nuevamente que $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$.

Proposición B.7. Si H es un subgrupo aislado de G y $H \neq G$ entonces $\rho_1(H) = 0$.

Demostración. Supongamos que $\rho_1(H) \neq 0$. Sea $g = (g_1, \ldots, g_m) \in G$, $g \geq 0$. Veamos que $g \in H$. Si $g = 0$ no hay nada que hacer. Si $g > 0$ hay dos posibles casos: $g_1 > 0$ o bien, existe $k > 1$ tal que $g_1 = \cdots = g_{k-1} = 0$ y $g_k > 0$.

- Caso 1. $g_1 > 0$. Sea $r_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $g_1 < r_1$. Por la proposición anterior esiste $h = (h_1, \ldots, h_m) \in H$ tal que $\rho_1(h) = r_1$, es decir, $h_1 = r_1$. Con esto
$$0 < g = (g_1, \ldots, g_m) < (r_1, h_2 \ldots, h_m) = h$$
de donde $g \in H$.

- Caso 2. Existe $k > 1$ tal que $g = (0, \ldots, 0, g_k, g_{k+1}, \ldots, g_m)$ con $g_k > 0$. Dado que $\rho_1(H) \neq 0$ por la proposición B.6 existe $h = (h'_1, h'_2, \ldots, h'_m) \in H$ tal que $1 = \rho_1(h) = h'_1$, de donde
$$0 < g = (0, \ldots, 0, g_k, g_{k+1}, \ldots, g_m) < (1, h'_2, \ldots, h'_m) = h'$$
por lo que $g \in H$.

Los casos anteriores muestran que $G \subset H$ y por tanto $H = G$ lo cual es una contradicción. $\square$

Si H es un subgrupo aislado propio de G, por la proposición anterior, el conjunto
$$L = \{i \in \mathbb{N}_m : \rho_i(H) = 0 \text{ para todo } j \leq i\}$$
es no vacío y además es finito, así que tiene un elemento máximo. En el siguiente resultado $l \in \mathbb{N}_m$ denotará a tal elemento máximo.

Proposición B.8. Si H es un subgrupo aislado propio de G entonces $\rho_j(H) = \mathbb{Q}$ para todo $j > l$.

Demostración. Por definición de l se tiene que $\rho_{l+1}(H) = \mathbb{Q}$ por lo que podemos tomar $y = (0, \ldots, 0, 1, y_{l+2}, \ldots, y_m) \in H$. Ahora bien, dados $j \in \{l+2, \ldots, m\}$ y $r_j \in \mathbb{Q}$ es claro que $x_j \in G$ dado por

$$(x_j)_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i = l+1, \\ r_j & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $(x_j)_i$ denota la i-ésima coordenada de x_j, es tal que $0 < x_j < y$, de donde $x_j \in H$ y además $\rho_j(x_j) = r_j$. Se sigue que $\mathbb{Q} \subset \rho_j(H)$ por lo que $\rho_j(H) = \mathbb{Q}$. □

El siguiente resultado ayuda a describir todos los subgrupos aislados de $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$.

Proposición B.9. Si H es un subgrupo aislado no nulo de $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$ entonces $H = H_i$ para algún $i \in \mathbb{N}_m$.

Demostración. Si $H = G = H_1$ la afirmación es clara, por lo que podemos suponer que $H \neq G$. Sea

$$l = \max \{ i \in \mathbb{N}_m : \rho_j(H) = 0 \text{ para todo } j \leq i \}.$$

Afirmamos que $H = H_{l+1}$. Por la proposición anterior ya se tiene que $H \subset H_{l+1}$. Para ver la otra contención sea $x = (0, \ldots, 0, r_{l+1}, \ldots, r_m) \in H_{l+1}$. Si $x = 0$ no hay nada que hacer, por lo que podemos suponer que $x > 0$. Sea $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r > 0$ y $r > r_{l+1}$. Por la proposición anterior existe $h = (0, \ldots, 0, r, h_{l+2}, \ldots, h_m) \in H$ y es tal que $0 < x < h$, de donde $x \in H$. □

El trabajo previo muestra que $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$ tiene exactamente $m+1$ subgrupos aislados y están ordenados de la siguiente manera:

$$G = H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \cdots \supsetneq H_m \supsetneq 0 \tag{B.1}$$

Es un hecho bien conocido que para cualquier anillo de valuación R existe una valuación ν que tiene a R como su anillo de valuación (ver por ejemplo [13, proposición 5.13, p.108]). Un hecho un poco menos conocido pero igualmente cierto es que dado un grupo abeliano ordenado G existe una valuación, y por tanto un anillo de valuación, que tiene a G como grupo de valores, este hecho puede encontrarse en [10, teorema 3.4, p.12].

Sea R un anillo de valuación con grupo de valores $G = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Q}$. Usaremos el hecho de que todos los subgrupos aislados de G se encuentran enlistados en (B.1) para obtener información importante de R, específicamente, su dimensión. Los siguientes resultados serán de utilidad.

Lema B.10. Sea $\nu : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ una valuación del campo K y sea R su anillo de valuación. Si H es un subgrupo aislado de G entonces

$$\psi(H) := \{x \in K : \nu(x) \geq 0 \text{ y } \nu(x) \notin H\} \in \operatorname{Spec}(R).$$

Demostración. Es claro que $\psi(H) \subset R$ al tenerse $\nu(x) \geq 0$ para $x \in \psi(H)$.

1. $\psi(H)$ es ideal de R.

   a) $0 \in \psi(H)$ pues $\nu(0) = \infty > 0$ y $\nu(0) = \infty \notin H$.

   b) Sean $x, y \in \psi(H)$ y supongamos que $\nu(x) \leq \nu(y)$. Se tiene entonces que $\nu(x+y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\} = \nu(x) \geq 0$ además, si $\nu(x+y) \in H$ la desigualdad anterior implicaría que $\nu(x) \in H$ lo cual no es posible, por tanto $\nu(x+y) \notin H$.

   c) Si $r \in R$ y $x \in \psi(H)$ entonces $\nu(r), \nu(x) \geq 0$ y $\nu(rx) = \nu(r) + \nu(x) \geq 0$. Además, como $0 \leq \nu(x) \leq \nu(r) + \nu(x) = \nu(rx)$, si $\nu(rx) \in H$ de la desigualdad anterior se tendría que $\nu(x) \in H$ lo cual contradice el hecho de que $x \in \psi(H)$, así que $\nu(rx) \notin H$.

   Los incisos anteriores muestran que $\psi(H)$ es ideal de R.

2. $\psi(H) \in \operatorname{Spec}(R)$. Observe primero que $1 \notin \psi(H)$ pues $\nu(1) = 0 \in H$, así que $\psi(H)$ es propio. Sean $x, y \in R$ tales que $xy \in \psi(H)$ y supongamos que $x \notin \psi(H)$. Como $\nu(x), \nu(y) \geq 0$ entonces $0 \leq \nu(y) \leq \nu(x) + \nu(y) = \nu(xy)$, de donde $\nu(y) \in H$ y por tanto $y \in \psi(H)$.

□

Lema B.11. Si G es un grupo abeliano ordenado y H_1, H_2 son dos subgrupos aislados de G tales que $H_1 \subsetneq H_2$ entonces $\psi(H_1) \supsetneq \psi(H_2)$.

Demostración. Primero veamos que $\psi(H_2) \subset \psi(H_1)$. Si $x \in \psi(H_2)$ entonces $\nu(x) \geq 0$ además, si $\nu(x) \in H_1$ se tendría que $\nu(x) \in H_2$ lo cual no puede ocurrir pues $x \in \psi(H_2)$, por lo que $\nu(x) \notin H_1$ y así $x \in \psi(H_1)$.

Sólo hace falta ver que $\psi(H_2) \subsetneq \psi(H_1)$. Como $H_1 \subsetneq H_2$ existe $y \in H_2$ tal que $y \notin H_1$, en particular se tiene que $y \neq 0$. Supongamos que $y > 0$. Si $x \in K$ es tal que $y = \nu(x)$ entonces $\nu(x) > 0$ y $\nu(x) \notin H_1$, por lo que $x \in \psi(H_1)$, y como $\nu(x) \in H_2$ se tiene también que $x \notin \psi(H_2)$. $\square$

Sea $\nu : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ una valuación del campo K con grupo de valores G y anillo de valuación R. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ y $a \in R \setminus \mathfrak{p}$ entonces $a \neq 0$, por lo que a es necesariamente una unidad de K y $\nu(a) \neq \infty$, con esto $\nu(R \setminus \mathfrak{p}) \subset G$. Si definimos $\varphi(\mathfrak{p}) = \nu(R \setminus \mathfrak{p}) \cup \{-g : g \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})\}$ tenemos que

a) $0 \in \varphi(\mathfrak{p})$ pues $0 = \nu(1) \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$.

b) Si $g, h \in \varphi(\mathfrak{p})$ se tienen los siguientes casos:

1. $g, h \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$. En este caso $g = \nu(a)$ y $h = \nu(b)$ para algunos $a, b \in R \setminus \mathfrak{p}$, de donde $ab \in R \setminus \mathfrak{p}$ y

$$g + h = \nu(a) + \nu(b) = \nu(ab) \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$$

de donde $g + h \in \varphi(\mathfrak{p})$.

2. $g = -x$ y $h = -y$ para algunos $x, y \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$. Del caso anterior $x + y \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$ y así $g + h = -(x + y) \in \varphi(H)$.

3. $g \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$ y $h = -x$ para algún $x \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$. En este caso $g = \nu(a)$ y $x = \nu(b)$ para algunos $a, b \in R \setminus \mathfrak{p}$ y así $g + h = \nu(ab^{-1})$. Se tienen los siguientes subcasos:

   I. $ab^{-1} \in R$. En este caso no puede ocurrir que $ab^{-1} \in \mathfrak{p}$ pues de lo contrario, como $b \in R$, se tendría que $a = (ab^{-1})\, b \in \mathfrak{p}$ lo que es una contradicción. De esta manera $ab^{-1} \in R \setminus \mathfrak{p}$, con lo cual $g + h \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$.

   II. $ab^{-1} \notin R$. Como R es anillo de valuación de K y $ab^{-1} \neq 0$ entonces $a^{-1}b \in R$ y como en el subcaso anterior no puede ocurrir que $a^{-1}b \in \mathfrak{p}$, por lo que $\nu(a^{-1}b) \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$ y $g + h = -\nu(a^{-1}b)$.

   En cualquiera de los subcasos anteriores se tiene que $g + h \in \varphi(\mathfrak{p})$.

4. $g = -y$ para algún $y \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$ y $h \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$. Este caso es análogo al caso anterior.

En cualquier caso se tiene que $g + h \in \varphi(\mathfrak{p})$.

El análisis previo muestra que $\varphi(\mathfrak{p})$ es subgrupo de G. A continuación mostraremos que de hecho este es un subgrupo aislado de G.

Lema B.12. Sea $\nu : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ una valuación del campo K con grupo de valores G y anillo de valuación R. Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ entonces $\varphi(\mathfrak{p})$ es un subgrupo aislado de G.

Demostración. Sea $h \in \varphi(\mathfrak{p})$ tal que $h \geq 0$ y sea $g \in G$ tal que $0 \leq g \leq h$. Debemos mostrar que $g \in \varphi(\mathfrak{p})$. Tenemos que $g = \nu(a)$ para algún $a \in K$ y como $\nu(a) \geq 0$ se tiene que $a \in R$. Para $h \in \varphi(\mathfrak{p})$ se tienen los siguientes casos:

1. $h = \nu(b)$ para algún $b \in R \setminus \mathfrak{p}$. En este caso, de la desigualdad $\nu(a) \leq \nu(b)$ se tiene que $\nu\left(ba^{-1}\right) = \nu(b) - \nu(a) \geq 0$, de donde $ba^{-1} \in R$. Si $a \in \mathfrak{p}$ entonces $b = \left(ba^{-1}\right) a \in \mathfrak{p}$ lo cual no puede ocurrir por lo que $a \in R \setminus \mathfrak{p}$.

2. $h = -x$ para algún $x \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$. En este caso $x = \nu(c)$ para algún $c \in R \setminus \mathfrak{p}$ y entonces $h = \nu\left(c^{-1}\right)$. De la desigualdad $\nu(a) \leq \nu\left(c^{-1}\right)$ se tiene que $\nu\left(c^{-1}a^{-1}\right) \geq 0$, de donde $c^{-1}a^{-1} \in R$. Si $a \in \mathfrak{p}$ entonces $c^{-1} = \left(c^{-1}a^{-1}\right) a \in \mathfrak{p}$, pero esto no puede ocurrir pues $c \in R$. Se sigue que $a \in R \setminus \mathfrak{p}$.

De los casos anteriores concluimos que $g \in \nu(R \setminus \mathfrak{p}) \subset \varphi(\mathfrak{p})$. $\square$

Lema B.13. Sea $\nu : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ una valuación del campo K con grupo de valores G y anillo de valuación R. Si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R)$ son tales que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ entonces $\varphi(\mathfrak{p}) \supsetneq \varphi(\mathfrak{q})$.

Demostración. Observe primero que $R \setminus \mathfrak{q} \subsetneq R \setminus \mathfrak{p}$. Dado $g \in \varphi(\mathfrak{q})$ se tienen dos casos:

1. $g = \nu(a)$ para algún $a \in R \setminus \mathfrak{q}$. En este caso $a \in R \setminus \mathfrak{p}$ y por tanto $a \in \nu(R \setminus \mathfrak{p}) \subset \varphi(\mathfrak{p})$.

2. $g = -x$ para algún $x \in \nu(R \setminus \mathfrak{q})$. En este caso $x \in \nu(R \setminus \mathfrak{p})$ y por tanto $g \in \varphi(\mathfrak{p})$.

Lo anterior muestra que $\varphi(\mathfrak{q}) \subset \varphi(\mathfrak{p})$. Por otro lado, dado que $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ existe $b \in \mathfrak{q}$ tal que $b \notin \mathfrak{p}$. Si definimos $h = \nu(b)$ tenemos que $h \in \varphi(\mathfrak{p})$. Afirmamos que $h \notin \varphi(\mathfrak{q})$. Si suponemos lo contrario tenemos nuevamente dos casos:

I. $h \in \nu(R \setminus \mathfrak{q})$. En este caso $h = \nu(a)$ para algún $a \in R \setminus \mathfrak{q}$, así que $\nu(a) = \nu(b)$ y por tanto $a = ub$ para alguna unidad u de R. Dado que $b \in \mathfrak{q}$ se sigue que $a \in \mathfrak{q}$, lo cual es una contradicción.

II. $h = -x$ para algún $x \in \nu(R \setminus \mathfrak{q})$. En este caso $x = \nu(c)$ para algún $c \in R \setminus \mathfrak{q}$, luego $\nu(b) = -\nu(c)$ y entonces $\nu(bc) = \nu(b) + \nu(c) = 0$, de donde $bc = u$ para alguna unidad u de R. Dado que $b \in \mathfrak{q}$, la igualdad anterior implica que $u \in \mathfrak{q}$ que es también una contradicción.

De los casos anteriores se concluye que $h \notin \varphi(\mathfrak{q})$. $\square$

Lema B.14. Sea $\nu : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ una valuación del campo K con grupo de valores G y anillo de valuación R y sea $\mathscr{A}$ el conjunto de todos los subgrupos aislados de G. Las funciones $\psi : \mathscr{A} \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$ y $\varphi : \operatorname{Spec}(R) \longrightarrow \mathscr{A}$ definidas en los lemas B.10 y B.12 son inversas una de la otra.

Demostración. Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$. Si $a \in \mathfrak{p}$ entonces $\varphi(a) \geq 0$ y $\nu(a) \notin \varphi(\mathfrak{p})$, de donde $a \in \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$, lo que muestra que $\mathfrak{p} \subset \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$. Para la otra contención, si $a \in R \setminus \mathfrak{p}$ entonces $\nu(a) \geq 0$ y $\nu(a) \in \nu(R \setminus \mathfrak{p}) \subset \varphi(\mathfrak{p})$, por lo que $a \notin \psi(\varphi(\mathfrak{p}))$ y así $\psi(\varphi(\mathfrak{p})) \subset \mathfrak{p}$.
Veamos ahora que dado $H \in \mathscr{A}$ se tiene que $\varphi(\psi(H)) = H$. Si $g \in H$ existe $a \in K$ tal que $g = \nu(a)$. Note que $a \neq 0$ pues en caso contrario $g = \infty \notin H$. Dado que a es una unidad de K y R es anillo de valuación de R se tiene que $a \in R$ o $a^{-1} \in R$.

1. Si $a \in R$ entonces $\nu(a) \geq 0$, como $\nu(a) = g \in H$, entonces $a \notin \psi(H)$ por lo que $g = \nu(a) \in \nu(\psi(H)) \subset \varphi(\psi(H))$.

2. Si $a^{-1} \in R$ entonces $\nu(a^{-1}) \geq 0$ y además $\nu(a^{-1}) = -\nu(a) = -g \in H$ pue $g \in H$, por lo que $a^{-1} \notin \psi(H)$. De esta manera, si $h = \nu(a^{-1})$ entonces $h \in \nu(R \setminus \psi(H))$ y $g = \nu(a) = -\nu(a^{-1}) = -h$ de donde $g \in \varphi(\psi(H))$.

De los casos anteriores obtenemos $H \subset \varphi(\psi(H))$. Para ver la otra contención sea $g \in \varphi(\psi(H))$. Se tienen los siguientes casos:

I. $g \in \nu(R \setminus \psi(H))$. En este caso $g = \nu(a)$ para algún $a \in R \setminus \psi(H)$, de donde $\nu(a) \geq 0$. Dado que $a \notin \psi(H)$ y $\nu(a) \geq 0$ se sigue que $g = \nu(a) \in H$.

II. $g = -h$ para algún $h \in \nu(R \setminus \psi(H))$. Por el caso anterior $h \in H$ y por tanto $g = -h \in H$.

Los casos anteriores muestran que $\varphi(\psi(H)) \subset H$ así que $\varphi(\psi(H)) = H$. $\square$

Teorema B.15. Sean ν una valuación sobre un campo K, G su grupo de valores y R su anillo de valuación. Existe una correspondencia biyectiva que invierte el orden entre los subgrupos aislados de G y los ideales primos de R

Demostración. Si denotamos por $\mathscr{A}$ al conjunto de subgrupos aislados de R entonces la función $\psi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ definida en el lema B.10 es biyectiva con inversa $\psi^{-1} = \varphi : \mathrm{Spec}(R) \longrightarrow \mathscr{A}$, donde φ es la función del lema B.12; esta función invierte el orden por los lemas B.11 y B.13. $\square$

Concluimos este apéndice con un par de implicaciones medulares para el ejemplo 14 del capítulo 3; presentamos estas a modo de observaciones.

Observación 13.

1. Sea $\nu : K \longrightarrow G \cup \{\infty\}$ una valuación con grupo de valores $G = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Q}$ y anillo de valuación R. Ya hemos visto que G tiene exactamente $m+1$ subgrupos aislados:

   $$G = H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \cdots \supsetneq H_m \supsetneq 0.$$

   Escribiendo $\mathfrak{p}_{j-1} = \psi(H_j)$ si $j = 1, \ldots, m$ y $\mathfrak{p}_m = \psi(0)$, donde $\psi : \mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ es la función del teorema anterior, tenemos que

   $$\begin{aligned} \mathfrak{p}_0 &= \psi(G) \\ &= \{x \in K : \nu(x) \geq 0 \text{ y } \nu(x) \notin G\} \\ &= \{x \in R : \nu(x) \notin G\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   y

   $$\begin{aligned} \mathfrak{p}_m &= \psi(0) \\ &= \{x \in K : \nu(x) \geq 0 \text{ y } \nu(x) \notin \{0\}\} \\ &= \{x \in R : \nu(x) > 0\} \end{aligned}$$

   el cual coincide con $\mathfrak{m}$, el ideal maximal de R. Por el teorema B.15 se obtiene una cadena de ideales primos

   $$0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{m-1} \subsetneq \mathfrak{p}_m = \mathfrak{m}.$$

   Tal cadena es de longitud máxima pues de lo contrario exitiría un subgrupo aislado H de G distinto a $0, H_1, \ldots, H_m$ lo cual, por la proposición B.9, no es posible.
   El argumento previo muestra que $\dim(R) = m$.

2. Si $G = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}$ los argumentos usados en esta sección pueden seguirse practicamente sin modificaciones para mostrar que los únicos subgrupos aislados no nulos de G están ordenados de la siguiente manera

$$G = H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq H_3 \supsetneq \cdots \supsetneq 0,$$

donde $H_i := \{(0, \dots, 0, x_i, x_{i+1}, \dots) : x_i, x_{i+1}, \dots \in \mathbb{Q}\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Si R es un anillo de valuación con grupo de valores $G = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}$, por el teorema B.15 se tiene que

$$\sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\} = \infty,$$

por lo que $\dim(R) = \infty$.

Bibliografía

[1] D. D. Anderson and J. Kintzinger, «*Ideals in direct products of commutative rings*», *Bull. Austral. Math. Soc.* 77 (2008), 477-483.

[2] D. F. Anderson and A. Badawi, «*On n-absorbing ideals of commutative rings*», *Comm. Alg.* 39 (2011), 1646-1672

[3] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald, *Introducción al álgebra conmutativa*, Ed. Reverté, Barcelona, España, 1978.

[4] A. Badawi, «*On 2-absorbing ideals of commutative rings*», *Bull. Austral. Math. Soc.* 75 (2007), 417-429.

[5] N. Bourbaki, *Commutative algebra, Chapters 1-7*, Elements of mathematics, Springer-Verlag, 1989.

[6] H. S. Choi, A. Walker, «*The radical of an n-absorbing ideal*», to appear in *J. Comm. Algebra.*

[7] A. Y. Darani, E. R. Puczylowski, «*On 2-absorbing commutative semigroups and their applications to rings*», *Semigroup Forum* 86 (2013), 83-91.

[8] G. Donadze, «*The Anderson-Badawi conjecture for commutative algebras over infinite fields*», *Indian J. Pure Appl. Math.* 47 (2016), 691-696.

[9] R. M. Fossum, *The divisor class group of a krull domain*, Springer-Verlag, New York, 1973.

[10] L. Fuchs and L. Salce, *Modules over valuation domains*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 97, Marcel Dekker, Inc, New York and Basel, 1985.

[11] R. Gilmer, *Multiplicative ideal theory*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, Vol. 90, Canada, 1992.

[12] A. Laradji, «*On n-absorbing rings and ideals*», *Colloq. Math.* 147 (2017), 265-273.

[13] M. D. Larsen and P. J. McCarthy, *Multiplicative theory of ideals*, Academic Press, New York and London, 1971

[14] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, New York, USA, 1986.

[15] P. Nasehpour, «*On the Anderson-Badawi $\omega_{R[x]}(I[x]) = \omega_R(I)$ conjecture*», *Archivum Mathematicum (BRNO)* 52 (2016), 71-78.

[16] P. Samuel and O. Zariski, *Commutative algebra, Volume I*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1958.

[17] R. Y. Sharp, *Steps in commutative algebra*, Second Edition, London Mathematical Society Student Texts 51, Cambridge University Press, 2000.